BIBLIOTECA ENCICLOPEDICA SANSONIANA

XX

A. N. WHITEHEAD

INTRODUZIONE ALLA MATEMATICA

G. C. SANSONI EDITORE FIRENZE

Coll. D. 117.18.

BIBLIOTECA ENCICLOPEDICA
SANSONIANA
XX

A. N. WHITEHEAD

INTRODUZIONE ALLA MATEMATICA

G. C. SANSONI - FIRENZE

Titolo originale:

AN INTRODUCTION TO MATHEMATICS

Traduzione a cura di GIAN MARIO CRESPI

COLLEZIONI
D
117
18
BIBLIOTECA CIVICA
BERTOLIANA - VICENZA

PROPRIETÀ LETTERARIA RISERVATA

Printed in Italy

1953 Tipografia già G. Civelli - Firenze, Via Faenza, 71

Capitolo I

LA NATURA ASTRATTA DELLA MATEMATICA

È facile che lo studio della matematica cominci con una delusione. Le importanti applicazioni di questa scienza, l'interesse teorico che i suoi concetti presentano, il rigore logico dei suoi metodi: tutto ciò fa sì che ci si attenda di venire rapidamente introdotti a sviluppi interessanti. Ci dicono che con l'aiuto di essa si possono pesare le stelle e contare i bilioni di molecole contenuti in una goccia d'acqua.

Eppure, come il fantasma del padre di Amleto, questa grande scienza elude i nostri sforzi, allorché noi tentiamo di impadronircene con le armi della nostra mente – « È qui, e là, non c'è più » – e quel poco che ci è dato di scorgere è ben lungi dal fornire la stessa scusa per quel suo carattere elusivo che poteva andar bene nel caso del fantasma, e cioè che esso è troppo nobile a paragone dei nostri mezzi grossolani. Al contrario, se vi è una cosa che meriti di essere affrontata con una « mostra di violenza » essa è proprio costituita da quei risultati banali che occupano le pagine di certi trattati elementari di matematica [1].

Ma il motivo per cui questa scienza non riesce a mantenersi all'altezza della sua fama è che i concetti fondamentali di essa non vengono esposti a chi studia districati dal procedimento tecnico inventato per facilitare la loro presentazione esatta in certi casi parti-

---

[1] Per le allusioni contenute in questo passo si veda: *Amleto*, atto I, sc. I (n. d. t.).

colari. Così il povero principiante si trova a dover lottare per acquistare la conoscenza di un cumulo di dettagli non illuminati da alcuna veduta generale. Senza dubbio la facilità tecnica è un requisito fondamentale per un'attività mentale elevata: sarà per noi impossibile apprezzare il ritmo di Milton o la passione di Shelley finché ci troveremo nella necessità di sillabare le parole e non saremo ben sicuri circa la forma delle singole lettere che le compongono. In questo senso non si può parlare di una strada maestra che conduca al sapere. Ma è altrettanto erroneo limitare l'attenzione ai procedimenti tecnici, tralasciando di considerare le idee generali. Questa è la via che conduce alla pedanteria.

L' intento dei seguenti capitoli non è di insegnare la matematica, ma di far sì che, fin dall' inizio di questi studi si sappia intorno a che cosa verte tale scienza, e perché essa costituisce necessariamente la base del pensiero esatto applicato ai fenomeni naturali. Nelle pagine seguenti ogni riferimento a deduzioni particolari pertinenti a qualsiasi parte della scienza verrà introdotto unicamente a scopo d'esemplificazione, e si avrà cura di rendere comprensibile l'andamento generale della trattazione, anche se qua e là si citerà qualche procedimento o qualche simbolo tecnico che il lettore non sempre è in grado di comprendere.

La maggior parte delle persone viene per la prima volta a contatto con la matematica attraverso l'aritmetica. Che due più due facciano quattro vien considerato solitamente come il tipo di una proposizione matematica semplice nota a tutti. L'aritmetica sarà quindi un buon argomento da prendere in esame al fine di scoprire, se possibile, il carattere più ovvio della scienza in questione. Ora il primo fatto degno di nota a riguardo dell'aritmetica è che essa si applica ad ogni cosa: ai sapori ed ai suoni, alle mele ed agli angeli, alle idee della mente e alle ossa del corpo. La natura delle cose in questione è perfettamente indifferente: di tutte le cose è vero che due più due fanno quattro. Perciò noi registriamo come caratteristica principale della matematica

il fatto che essa tratta proprietà e concetti che sono applicabili alle cose per il semplice fatto che queste sono cose, e indipendentemente da qualsiasi particolare sentimento, stato d'animo, sensazione comunque connessi ad esse. Questo è ciò che si intende quando si dice che la matematica è una scienza astratta.

Il risultato che abbiamo raggiunto va considerato attentamente. È naturale pensare che una scienza astratta non possa essere molto importante per le circostanze della vita umana. Si ricorderà che lo Swift, nella sua descrizione del viaggio di Gulliver a Laputa, non presenta un'opinione coerente su questo punto. Egli descrive i matematici di quel paese come degli sciocchi ed inetti sognatori, l'attenzione dei quali deve esser tenuta desta da battitori. Inoltre il sarto matematico misura l'altezza di Gulliver col quadrante e deduce le altre sue dimensioni per mezzo della riga e del compasso, confezionandogli poi un abito che gli torna molto male. D'altra parte però i matematici di Laputa con la loro meravigliosa invenzione, l' isola magnetica librantesi nell'aria, dominavano il paese e mantenevano il loro potere sui sudditi. In realtà lo Swift visse in un'epoca nella quale era particolarmente fuori luogo schernire i matematici contemporanei. Da poco infatti erano stati scritti i *Principia* di Newton, una delle grandi forze che hanno trasformato il mondo moderno. Lo Swift avrebbe avuto altrettanta ragione di ridere davanti ad un terremoto.

Ma un semplice elenco delle conquiste della matematica non è un modo soddisfacente per giungere a farsi un' idea dell' importanza di essa. Vale la pena di fermarsi un poco a riflettere onde afferrare la ragione fondamentale per cui la matematica, proprio a motivo della sua astrattezza, dovrà sempre rimanere uno dei campi d' indagine più importanti per il pensiero. Cerchiamo di renderci conto per qual motivo le spiegazioni dell'ordine degli eventi tendano necessariamente ad assumere carattere matematico.

Si consideri come tutti gli eventi siano collegati

fra di loro. Quando noi vediamo il lampo, tendiamo l'orecchio in attesa del tuono; quando sentiamo il vento, il nostro sguardo cerca le onde sul mare; viene il freddo autunnale e le foglie cadono. Dovunque regna l'ordine, in guisa che quando si sono notate alcune circostanze, noi possiamo prevedere che se ne verificheranno pure delle altre. Il progresso della scienza consiste nell'osservare queste connessioni e nel mostrare con paziente indagine che gli eventi di questo mondo in perpetuo mutamento non sono che esemplificazioni di alcune connessioni o relazioni generali che vengon chiamate leggi. Vedere il generale nel particolare e il permanente nel transitorio è la mèta a cui tende il pensiero scientifico. All'occhio della scienza la caduta di una mela, il moto di un pianeta intorno al sole e l'adesione dell'atmosfera alla terra, appaiono tutte come esemplificazioni della legge della gravitazione. Questa possibilità di scomporre le circostanze più complesse, più evanescenti in varie esemplificazioni di leggi permanenti è l' idea dominante del pensiero moderno.

Ora pensiamo quali siano le leggi che ci occorrono per realizzare in modo completo questo ideale scientifico. La nostra conoscenza dei fatti particolari del mondo che ci attornia, viene ottenuta a partire dalle nostre sensazioni. Noi vediamo ed udiamo e gustiamo ed odoriamo, e sentiamo il caldo ed il freddo ed abbiamo sensazioni di pressione e di contatto e di dolore e di pena. Queste non sono altro che le nostre sensazioni individuali: il mio mal di denti non può essere il tuo mal di denti, e la mia sensazione visiva non può essere la tua sensazione visiva. Ma noi attribuiamo il sorgere di queste sensazioni a certe relazioni fra le cose che costituiscono il mondo esterno. Così il dentista non estrae il mal di denti, ma il dente. Non solo, ma noi cerchiamo di raffigurarci il mondo come un unico sistema connesso di cose, sottostante a tutte le percezioni di tutti i soggetti. Non vi è un mondo di cose corrispondente alle mie sensazioni ed un altro corrispondente alle tue, ma un unico mondo nel quale esistiamo entrambi. Il dente è il medesimo sia per il den-

tista che per il paziente. Inoltre il mondo che noi udiamo e tocchiamo è il medesimo mondo che vediamo.

È quindi facile comprendere che noi abbiam bisogno di descrivere le connessioni fra queste cose esterne in qualche maniera che non risulti dipendente da alcuna sensazione particolare, e neppure da tutte le sensazioni di qualsiasi persona particolare. Le leggi cui si conforma il corso degli eventi nel mondo delle cose esterne, vanno descritte, se possibile, in una forma neutra, universale, che sia la medesima per i ciechi come per i sordi, la medesima per esseri con facoltà superiori alla nostra comprensione, come per gli esseri umani normali.

Ma quando noi abbiam messo da parte le nostre sensazioni immediate, la parte più utile (per la chiarezza definitezza ed universalità) di ciò che rimane è costituita dalle nostre nozioni generali delle proprietà formali astratte delle cose: in realtà dalle nozioni matematiche astratte sopra menzionate. È così che a poco a poco, e senza rendersi pienamente conto del significato di tale evoluzione, l'umanità è stata spinta a cercare una descrizione matematica delle proprietà dell'universo, poiché soltanto in questo modo ci si può formare un' idea generale del corso degli eventi che sia libera da ogni riferimento a persone particolari od a particolari tipi di sensazione. Ad esempio potrebbe darsi che a tavola venisse chiesto: «Che cos'era ciò che sottostava alla mia sensazione visiva, alla tua sensazione tattile e alla sua sensazione gustativa ed olfattiva ?» e che la risposta sia «una mela». Ma nella sua analisi conclusiva la scienza cerca di descrivere la mela in funzione della posizione e del moto di certe molecole; una descrizione che fa a meno di me, di te e di lui, e che del pari ignora la vista e il tatto e il gusto e l'odorato. Così le nozioni matematiche a motivo della loro astrattezza forniscono proprio quel che occorre per una descrizione scientifica del corso degli eventi.

Di solito si è frainteso questo punto, poiché lo si è concepito in maniera troppo ristretta. Pitagora ne ebbe l' intuizione quando proclamò che il numero è il principio

di tutte le cose. E, venendo ai tempi moderni, nella persuasione che la spiegazione ultima di tutte le cose dovesse trovarsi nella meccanica newtoniana, si trovava adombrata la verità secondo cui, via via che una scienza si sviluppa verso uno stadio di perfezione, le sue nozioni. tendono ad assumere un carattere matematico.

Capitolo II

LE VARIABILI

La matematica come scienza ebbe principio allorché per la prima volta qualcuno, probabilmente un greco, dimostrò delle proposizioni intorno a *qualsiasi* cosa od intorno a *qualche* cosa, senza specificazione di questa o quella determinata cosa in particolare. Queste proposizioni vennero per la prima volta enunciate dai greci nel campo della geometria: e la geometria fu pertanto la grande scienza matematica dei greci. Dopo la nascita della geometria passarono dei secoli prima che l'algebra prendesse effettivamente l'avvio, benché vi sia stata qualche vaga anticipazione da parte degli ultimi matematici greci.

Le nozioni di *qualsiasi* e di *qualche* vengono introdotte nell'algebra mediante l'uso delle lettere in luogo dei numeri determinati dell'aritmetica. Così, invece di dire che $2 + 3 = 3 + 2$, noi in algebra generalizziamo dicendo che se x ed y rappresentano due numeri qualsiasi, $x + y = y + x$. Così pure, invece di dire che $3 > 2$, noi generalizziamo e diciamo che se x è un numero qualsiasi, esiste qualche numero (o dei numeri) y in guisa che $y > x$. Possiamo osservare di passaggio, che quest'ultima supposizione (poiché in questo caso di formulazione definitiva e rigorosa si tratta di una supposizione) è d' importanza vitale sia per la filosofia che per la matematica, poiché mediante essa viene introdotta la nozione di infinito. Forse fu necessaria l' introduzione dei numeri arabici con la conseguente completa elimi-

nazione dalla matematica dell'uso delle lettere per indicare numeri d terminati, perché i matematici scorgessero la convenienza tecnica dell'uso delle lettere per rappresentare le nozioni di *qualsiasi* numero e di *qualche* numero. i romani avrebbero espresso il numero dell'anno in cui vien scritto questo libro nella forma MDCCCCX, mentre noi scriviamo 1910, riservandoci le lettere per l'altro uso. Questa è però una semplice congettura. Dopo la nascita dell'algebra fu inventato da Newton e da Leibniz il calcolo differenziale; poi, per quanto concerne quelle nozioni, vi fu un periodo di sosta nel progresso della filosofia matematica; e non fu che nell'ultimo breve corso di anni che ci si rese conto di quanto siano fondamentali il *qualsiasi* ed il *qualche* per la natura stessa della matematica; e il risultato di ciò fu l'aprirsi di altri nuovi campi per l' indagine matematica.

Scriviamo ora alcuni semplici enunciati algebrici, con l' intento di comprendere esattamente come sorgono queste nozioni fondamentali.

(1) Per *qualsiasi* numero x, $x + 2 = 2 + x$;

(2) Per *qualche* numero x, $x + 2 = 3$;

(3) Per *qualche* numero x, $x + 2 > 3$.

Il primo punto da notare riguarda le diverse possibilità contenute nel significato del *qualche*, come è usato qui. Poiché $x + 2 = 2 + x$ per qualsiasi numero x, l'enunciato risulta vero per *qualche* numero x. Pertanto nell'uso presente il *qualsiasi* implica il *qualche*, e il *qualche* non esclude il *qualsiasi*. Nel secondo esempio poi vi è in effetti un solo numero x tale che $x + 2 = 3$, cioè soltanto il numero 1. Così il *qualche* può ridursi a quell'unico numero. Ma nel terzo esempio ogni numero x che sia maggiore di 1 dà $x + 2 > 3$. In questo caso dunque vi è un numero infinito di numeri che rientrano nel *qualche* numero. Perciò il *qualche* può assumere qualunque significato intermedio fra *qualsiasi* ed *uno soltanto* compresi questi due casi limite.

È naturale sostituire gli enunciati (2) e (3) con i problemi:

(2′) Per quale numero x si ha $x + 2 = 3$?

(3′) Per quali numeri x si ha $x + 2 > 3$?

Se consideriamo il problema (2′), $x + 2 = 3$ è un'equazione ed è facile vedere che la sua soluzione è $x = 3 - 2 = 1$. Quando noi ci poniamo il problema implicito nella formulazione dell'equazione $x + 2 = 3$, x viene chiamata l'incognita. Lo scopo cui tende la soluzione di un'equazione è la determinazione dell'incognita. Le equazioni hanno molta importanza in matematica e si direbbe che il problema (2′) esemplifichi una nozione molto più vasta e fondamentale che non l'enunciato originario (2). Questa è però una veduta del tutto erronea. La nozione della «variabile» indeterminata quale si trova implicita nell'uso del «qualsiasi» e del «qualche», è la nozione veramente importante in matematica; la nozione dell'«incognita» di un'equazione la quale va risolta il più rapidamente possibile, ha soltanto una funzione subordinata, benché sia naturalmente molto importante. Una delle ragioni per cui gran parte dell'algebra elementare appare qualcosa di banale, è la preoccupazione che i libri di testo rivelano per la soluzione delle equazioni. La stessa osservazione si applica alla soluzione della disequazione (3′) paragonata con l'enunciato originario (3).

Ma la maggior parte delle formule interessanti, specialmente quando in esse è presente la nozione di *qualche*, implicano più di una variabile. Per esempio la considerazione delle coppie di numeri x e y (frazionari od interi) che soddisfano la $x + y = 1$, implica la nozione di due variabili correlate x ed y. Quando intervengono due variabili, han luogo gli stessi due tipi principali di enunciato. Ad esempio: (1) per *qualsiasi* coppia di numeri x ed y, $x + y = y + x$, e (2) per *qualche* coppia di numeri x ed y, $x + y = 1$.

Il secondo tipo di enunciato ci induce a considerare l'insieme delle coppie di numeri connessi tra loro da una relazione fissa (nel caso presente dalla relazione

$x + y = 1$). Uno dei vantaggi che presentano le formule del primo tipo, vere per *qualsiasi* coppia di numeri, è che per mezzo di esse si possono trasformare le formule del secondo tipo in un numero indefinito di espressioni equivalenti. Per esempio la relazione $x + y = 1$ è equivalente alle relazioni

$$y + x = 1, \ (x - y) + 2y = 1, \ 6x + 6y = 6,$$

e così via. Così un matematico abile tra le varie forme equivalenti della relazione che sta considerando userà quella che è più conveniente per i suoi scopi immediati.

Non è vero in generale che, quando una coppia di termini soddisfa una relazione fissa, se è dato uno dei termini anche l'altro risulta determinato in modo univoco. Per esempio, quando x ed y soddisfano la $y^2 = x$, se $x = 4$, y può essere ± 2, e quindi per ogni valore positivo di x vi sono due diversi possibili valori di y. Nella relazione $x + y > 1$ poi, quando è dato x od y, è possibile un numero indefinito di valori per l'altro termine.

Vi è poi un altro punto importante da notare. Se, quando consideriamo la relazione $x + y = 1$, noi ci limitiamo ai numeri positivi, interi o frazionari, allora se o x od y è maggiore di 1, non vi è alcun valore positivo che l'altro termine possa assumere in modo da soddisfare la relazione. Dunque il 'campo' della relazione per x è ristretto a numeri minori di 1, ed analogamente avviene per il 'campo' aperto alla y. Ancora: si considerino soltanto i numeri interi, positivi o negativi, e si prenda la relazione $y^2 = x$, soddisfatta da coppie di numeri siffatti. Qualunque valore intero venga allora attribuito ad y, x può assumere un valore intero corrispondente. In tal modo il 'campo' della y risulta illimitato nell'ambito dei numeri interi positivi o negativi. Ma il 'campo' della x risulta limitato in due modi. In primo luogo la x dev'essere positiva, e in secondo luogo, dovendo y essere intera, x dev'essere un quadrato perfetto. Perciò il 'campo' della x è limitato alla serie degli interi 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, ecc., cioè ad 1, 4, 9, 16, ecc.

Lo studio delle proprietà generali di una relazione fra coppie di numeri viene grandemente facilitato dall'uso di un diagramma costruito nel modo seguente:

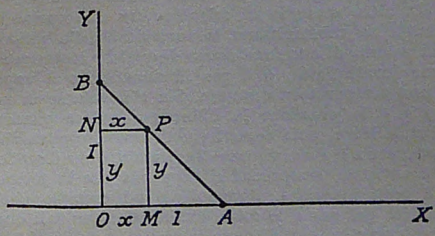

Fig. 1

Si conducano due rette perpendicolari OX e OY; ogni numero x venga rappresentato mediante x unità di lunghezza (in qualunque scala) sulla OX, ogni numero y da y unità di lunghezza (in qualunque scala) sulla OY. Allora se OM, sulla OX è lungo x unità, ed ON, sulla OY, è lungo y unità, completando il parallelogramma OMPN noi troviamo un punto P il quale corrisponde alla coppia di numeri x e y. A ciascun punto corrisponde un'unica coppia di numeri, ed a ciascuna coppia di numeri corrisponde un unico punto. I due numeri della coppia vengon chiamati le coordinate del punto. Allora i punti le cui coordinate soddisfano qualche relazione determinata, si possono indicare in modo opportuno col tracciare una linea nel caso che essi giacciano tutti su di una linea, o col tratteggiare un'area, nel caso che essi formino la totalità dei punti dell'area. Se si può rappresentare la relazione mediante un'equazione come $x + y = 1$, o $y^2 = x$, allora i punti giacciono su di una linea, la quale sarà retta nel primo caso e curva nel secondo. Per esempio, se si considerano soltanto valori positivi, i punti le cui coordinate soddi-

sfano la $x + y = 1$ giacciono sulla linea retta AB della Fig. 1, dove OA = 1 e OB = 1. Così questo segmento di linea retta AB, dà una rappresentazione visiva delle proprietà della relazione per valori positivi delle variabili.

Un altro esempio di relazione fra due variabili si presenta se consideriamo le variazioni della pressione e del volume di una data massa di qualche sostanza aeriforme (come l'aria, o il gas illuminante, o il vapore) ad una temperatura costante. Sia v il volume in piedi cubi e p la pressione in libbre per pollice quadrato. Allora la legge, nota come legge di Boyle, esprimente la relazione tra p e v al variare di entrambi, è che il prodotto pv è costante, sempreché si supponga che la temperatura resti invariata. Supponiamo ad esempio che la quantità del gas e le altre condizioni siano tali che si possa porre $pv = 1$ (il numero preciso che deve figurare nel secondo membro dell'equazione non apporta alcuna differenza sostanziale).

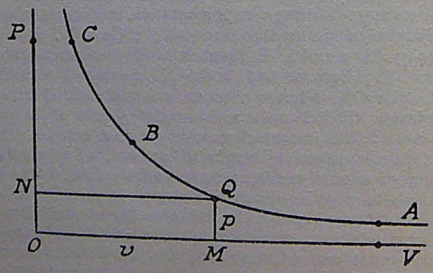

Fig. 2

Allora nella Fig. 2 noi consideriamo due rette perpendicolari OV ed OP, e sulla OV prendiamo OM per rappresentare v unità di volume, e sulla OP, ON per rappresentare p unità di pressione. Allora il punto Q,

che si trova completando il parallelogrammo OMQN rappresenta lo stato del gas quando il suo volume è di v piedi cubi e la sua pressione di p libbre per pollice quadrato. Se le condizioni della massa di gas considerata sono tali che $pv = 1$, allora tutti questi punti Q corrispondenti ad ogni possibile stato di questa massa di gas devono giacere sulla curva ABC, la quale include tutti i punti per i quali p e v sono positivi e $pv = 1$ Così questa curva offre una rappresentazione visiva della relazione che ha luogo tra volume e pressione. Quando la pressione è molto alta il corrispondente punto Q dev'essere prossimo a C o addirittura oltre C lungo la parte non completata della curva; e allora il volume sarà molto piccolo. Quando il volume è grande Q sarà prossimo ad A od oltre A; e allora la pressione sarà bassa. Si noti che il fisico o l' ingegnere possono aver bisogno di sapere la pressione particolare corrispondente ad un certo volume assegnato in modo preciso. Abbiamo allora il caso della determinazione dell' *incognita* p quando v è un numero noto. Ma ciò ha luogo soltanto in casi particolari. Nel considerare in generale le proprietà del gas e il suo futuro comportamento essi devono aver presente la forma generale dell' intera curva ABC e le sue proprietà generali. In altre parole, l' idea veramente fondamentale è quella della coppia delle *variabili* soddisfacenti la relazione $pv = 1$. Questo esempio illustra quanto sia fondamentale la nozione delle *variabili* sia nelle applicazioni, sia nella parte teorica della matematica.

Capitolo III

METODI DI APPLICAZIONE

Val la pena di riflettere sul modo in cui la nozione di variabili soddisfacenti una certa relazione interviene nelle applicazioni della matematica; soffermandoci un poco ad esaminare questo punto, riusciremo a farci un' idea chiara dell' intero argomento.

Cominciamo col più semplice degli esempi: Supponiamo che la costruzione di un edificio venga a costare 1 scellino per piede cubico e che 20 scellini formino una sterlina. Allora con questa legge si viene ad ammettere che, in tutte le circostanze complesse che accompagnano la costruzione di una nuova casa, fra tutte le svariate sensazioni e gli svariati sentimenti del proprietario, dell'architetto, del capomastro, dei muratori e di quelli che osservano la casa quando questa è finita, resti fissa quella correlazione determinata fra il volume del materiale che compone la casa e il prezzo che essa viene a costare al proprietario e cioè che se x è il numero dei piedi cubi e Lst. y il costo, allora $20y = x$. Si ammette che questa correlazione fra x ed y sia vera per la costruzione di qualsiasi casa, da parte di qualsiasi proprietario. Inoltre non si suppone che il volume della casa ed il costo vengano percepiti mediante qualche sensazione o qualche facoltà particolare o da parte di qualche individuo particolare. Essi vengono stabiliti in modo generale ed astratto, senza tener alcun conto dello stato d'animo del proprietario nel momento in cui dovrà pagare il conto.

Ora, riflettiamo ancora un po' sul significato di tutto questo. La costruzione di una casa è una serie complessa

di fatti. Sarebbe impossibile cominciare ad applicare quella legge o verificarne la validità se non vi fosse la possibilità di riconoscere entro il corso generale degli eventi una serie definita di fatti tali da costituire un caso particolare di ciò che chiamiamo la costruzione di una casa. In breve, noi dobbiamo sapere che ciò che vediamo è una casa e dobbiamo riconoscere gli eventi che fan parte del processo della costruzione di tale casa. Poi, tra questi eventi che noi abbiamo mentalmente isolati dal resto della natura si devono poter determinare i due elementi del costo e del volume del materiale; e una volta che questi siano entrambi determinati, allora, se la legge è vera, essi soddisfano la formula generale.

$$20y = x.$$

Ma è vera questa legge? Chiunque se ne intenda di costruzioni saprà che noi qui abbiamo fissato un costo piuttosto alto. Soltanto delle abitazioni di tipo dispendioso vengon costruite a quel prezzo. Ciò mette in risalto un altro punto che va chiarito. Quando facciamo dei calcoli matematici usando la formula $20y = x$, per noi è indifferente che la legge sia vera o falsa. In realtà è indifferente persino il significato assegnato ad x e ad y e cioè che essi rappresentino rispettivamente un certo numero di piedi cubici ed un certo numero di sterline. Durante le indagini matematiche noi consideriamo, in effetto, soltanto le proprietà di questa correlazione fra una coppia di numeri variabili x ed y. I nostri risultati si applicheranno altrettanto bene se noi interpreteremo y ed x in modo che essi servano ad indicare rispettivamente un certo numero di pescatori ed il numero di pesci catturati in guisa che quella supposta legge venga ad affermare che ogni pescatore prende in media venti pesci. La certezza matematica dell'indagine riguarda soltanto i risultati considerati come rivelatori di certe proprietà della correlazione $20y = x$ tra la coppia variabile di numeri x e y. Non vi è certezza matematica di alcuna sorta circa il costo effettivo della costruzione

di una casa qualsiasi. La legge non è perfettamente vera e il risultato da essa fornito non sarà perfettamente esatto. In realtà può darsi che esso sia irrimediabilmente sbagliato.

Ora tutto ciò appare senza dubbio come qualcosa di molto ovvio. Ma in realtà quando si passa a casi più complicati non c'è errore più comune di quello consistente nel supporre che, essendosi fatti lunghi ed accurati calcoli matematici, l'applicazione del risultato a qualche fatto della natura sia qualcosa di assolutamente certo. In nessuna argomentazione le conclusioni possono presentarsi fornite di una certezza maggiore di quella delle premesse da cui si è partiti. Tutti i calcoli matematici applicati al corso della natura partono dalla supposizione di qualche legge della natura, quale ad esempio quella supposta legge circa il costo delle costruzioni cui si è sopra accennato. Quindi, per quanto accuratamente noi abbiamo calcolato che debba accadere un certo evento, resta sempre il dubbio: È vera la legge? Se la legge stabilisce un risultato preciso allora è quasi certo che essa non è perfettamente vera; e così anche nel migliore dei casi è improbabile che si verifichi precisamente quel risultato che era stato calcolato. Senonché a noi manca la facoltà di compiere osservazioni aventi una precisione ideale, e perciò, dopo tutto, le nostre leggi imprecise possono andare abbastanza bene.

Ci occuperemo ora di un caso reale: la legge newtoniana della gravitazione. Questa legge afferma che due corpi qualsiasi si attraggono reciprocamente con una forza proporzionale al prodotto delle loro masse ed inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza. Così, se m ed M sono le masse dei due corpi calcolate, poniamo, in libbre e d miglia è la distanza fra di essi, la forza esercitantesi su ciascuno dei due corpi e dovuta all'attrazione dell'altro è proporzionale a $\frac{m\mathrm{M}}{d^2}$. Questa forza la si può dunque indicare con $\frac{km\mathrm{M}}{d^2}$ dove k è un numero determinato che dipende dalla gran-

dezza assoluta di questa attrazione e inoltre dalla scala da noi scelta per la misura delle forze. È facile scorgere che se noi vogliamo calcolare con forze quali il peso di una massa di 1 libbra, il numero indicato da k risulterà estremamente piccolo; poiché quando sia ad m che ad M ed a d si assegna il valore 1, $\frac{kmM}{d^2}$ diviene l'attrazione gravitazionale di due masse uguali di una libbra ciascuna poste alla distanza di 1 miglio l'una dall'altra, e tale valore è assolutamente inapprezzabile.

Comunque noi possediamo ora la nostra formula per la forza di attrazione. Se indichiamo con F questa forza, sarà $F = \frac{kmM}{d^2}$; formula che dà la correlazione tra le variabili F, m, M e d. È nota a tutti la storia di come ciò venne scoperto. Essa afferma che Newton si trovava seduto in un giardino, che osservò la caduta di una mela e che gli balenò allora nella mente la legge della gravitazione universale. Ora, quando la formulazione definitiva della legge si presentò alla sua mente, egli poteva benissimo trovarsi in un giardino come anche in qualsiasi altro luogo (e in qualche luogo doveva pur trovarsi in quel momento); ma ai nostri intenti è più istruttivo soffermarci a considerare quella lunga serie di speculazioni preparatorie che furono necessarie perché si potesse giungere a formulare questa legge precisa. In primo luogo era necessario si affermassero l'abito mentale matematico ed il metodo matematico di cui si è discorso nei due capitoli precedenti; diversamente Newton non avrebbe mai potuto pensare una formula esprimente la forza che si esercita fra due masse *qualsiasi* ad una distanza *qualsiasi*. Inoltre, che significano i termini Forza, Massa, Distanza, da lui impiegati? A noi sembra molto ovvio che si concepiscano tutte le cose materiali come formanti un tutto geometrico definito, tale che le distanze fra le sue varie parti possono misurarsi in base a qualche unità di lunghezza come il miglio o la yarda. Si può quasi dire che questo è il primo aspetto sotto il quale ci si presenta una struttura ma-

teriale. Ma esso è un risultato raggiunto a poco a poco attraverso lo studio della geometria e della teoria della misura. Persino ai nostri giorni, in certi casi, sono più convenienti altri modi di considerare le cose: in una regione montagnosa, ad esempio, le distanze vengono spesso calcolate in ore. Ma, prescindendo dalla distanza, gli altri termini, la Forza e la Massa, sono molto più oscuri. Una comprensione esatta delle nozioni che Newton intendeva esprimere con queste parole fu raggiunta lentamente, e in realtà fu Newton stesso il primo uomo che fosse giunto ad impadronirsi in modo completo dei veri principi generali della dinamica.

Durante il medio evo, sotto l' influsso di Aristotele, questa scienza era concepita in modo del tutto erroneo. Newton ebbe il vantaggio di nascere dopo una serie di grandi uomini, e specialmente l' italiano Galileo, i quali nei due secoli precedenti avevano ricostruito quella scienza ed avevano trovato il giusto metodo da impiegare in essa. Egli completò la loro opera. Poi, da ultimo, con le idee di forza, massa e distanza ben chiare e distinte nella sua mente e con una netta visione della loro importanza e della loro applicabilità a fenomeni quali la caduta di una mela o il moto dei pianeti, egli scoprì la legge della gravitazione e dimostrò che in essa abbiamo la formula che sempre si trova soddisfatta in queste differenti specie di moto.

L'essenziale, nell'applicazione delle formule matematiche, è di avere delle idee chiare e di valutare in modo esatto la loro applicabilità ai fenomeni che si stanno osservando. I nostri lontani antenati si rendevano conto al pari di noi dell' importanza dei fenomeni naturali e di quanto sia desiderabile prendere misure efficaci allo scopo di regolare il corso degli eventi. Sotto l' influsso di idee inappropriate essi compivano cerimonie religiose complesse per favorire la nascita della nuova luna ed eseguivano sacrifici allo scopo di tener in vita il sole nel periodo critico di un'eclissi. Non vi è ragione alcuna per ritenere che essi fossero più sciocchi di noi. Ma in quell'epoca le circostanze non avevano reso pos-

sibile il lento accumularsi di idee chiare ed applicabili.

In qual modo la scienza fisica giunga ad assumere una forma tale da poter esser trattata con metodi matematici, è messo in luce dalla storia del graduale sviluppo della scienza dei fenomeni elettromagnetici. I temporali sono eventi di proporzioni grandiose che incutono terrore agli uomini e persino agli animali. Dai tempi più remoti devono esser stati oggetto di ipotesi stravaganti e fantastiche (benché possa anche venir fatto di chiedersi se le nostre scoperte scientifiche moderne riguardanti l'elettricità non siano più stupefacenti di tutte le spiegazioni magiche date dai selvaggi). I greci sapevano che l'ambra (in greco: electron) quando vien strofinata attrae corpi leggeri ed asciutti. Nell'anno 1600 il Dottor Gilbert di Colchester pubblicò il primo lavoro che trattasse l'argomento con un certo metodo scientifico. Egli stese un elenco delle sostanze che posseggono proprietà simili a quelle dell'ambra; gli va inoltre riconosciuto il merito di aver messo in connessione, sia pure in modo vago, i fenomeni elettrici con i fenomeni magnetici. Le conoscenze in materia si estesero alla fine del secolo XVII e durante il secolo XVIII. Si costruirono macchine elettriche e si poté ottenere da esse la produzione di scintille; fu inventata la bottiglia di Leida con la quale si possono intensificare questi effetti. Si era raggiunta una certa conoscenza organica, ma non si era ancora trovata alcun' idea matematica appropriata. Nell'anno 1752 Franklin fece salire un cervo volante in mezzo alle nubi e dimostrò che i temporali erano fenomeni di natura elettrica.

Intanto fin dalle epoche più remote i cinesi avevano utilizzato la proprietà caratteristica dell'ago magnetico; non sembra però che essi connettessero ciò con alcuna idea teorica. Le trasformazioni veramente profonde nel modo di vivere degli uomini hanno tutte la loro prima origine nella conoscenza perseguita come fine a sé stessa. L'uso della bussola non fu introdotto in Europa che alla fine del secolo XII dell'era volgare, dopo più di tremila anni da quando era stata usata per la prima volta in

Cina. L' importanza che la scienza dei fenomeni elettromagnetici ha in seguito assunto in tutti i campi della vita umana non è dovuta all'eminente spirito pratico degli europei, ma al fatto che in occidente i fenomeni elettrici ed i fenomeni magnetici furono studiati da uomini le cui menti erano dominate da interessi teorici astratti.

La scoperta della corrente elettrica si deve a due italiani a Galvani (1780) ed a Volta (1792). Questa grande scoperta dischiuse all' indagine tutta una nuova serie di fenomeni. Gli scienziati avevano ora dinanzi tre gruppi di fenomeni distinti, anche se connessi: gli effetti dell'elettricità 'statica' prodotta dalle macchine elettriche a strofinio, i fenomeni magnetici, e gli effetti dovuti alle correnti elettriche. Dalla fine del secolo XVIII in poi questi tre rami di indagine vennero rapidamente connessi tra di loro e si costruì la moderna scienza dell'elettromagnetismo la quale minaccia oggi di trasformare il modo di vivere degli uomini.

In questo periodo fanno la loro comparsa le nozioni matematiche. Nel decennio fra il 1780 ed il 1789 il francese Coulomb dimostrò che i poli magnetici si attraggono o si respingono in ragione inversa del quadrato delle loro distanze e che inoltre la stessa legge vale per le cariche elettriche (è curiosa l'analogia tra queste leggi e la legge della gravitazione). Nel 1820 il danese Oersted scoprì che le correnti elettriche esercitano una forza sui magneti e quasi immediatamente dopo la legge matematica concernente questa forza venne formulata in termini esatti dal francese Ampère, il quale dimostrò inoltre che due correnti elettriche esercitano delle forze l'una sopra l'altra.

« Le ricerche sperimentali con le quali Ampère stabilì la legge dell'azione meccanica fra correnti elettriche sono uno dei più brillanti risultati raggiunti dalla scienza. L' intero complesso teorico e sperimentale sembra sia scaturito adulto ed armato dal cervello del « Newton dell'elettricità ». Esso è perfetto nella forma ed impeccabile nella accuratezza, ed è riassunto in una formula

dalla quale si possono dedurre tutti i fenomeni e che è destinata a rimanere sempre la formula basilare dell'elettrodinamica »[1].

Le importanti leggi dell' induzione fra correnti e dell' induzione fra correnti e magneti furono scoperte da Michele Faraday nel 1831.32 Fu chiesto a Faraday: « A che serve questa scoperta ? » Ed Egli rispose: « A che serve un bambino ? egli cresce e diventa un uomo ». Il bambino di cui parlava Faraday è divenuto un uomo e costituisce ora la base di tutte le moderne applicazioni dell'elettricità. Inoltre Faraday riorganizzò tutta la concezione teorica della scienza. Nel 1873 le sue idee, che non erano state ben comprese dal mondo scientifico, vennero estese e poste in forma schiettamente matematica da Clerk Maxwell. A conclusione delle sue indagini matematiche Maxwell giunse a stabilire che, date certe condizioni, le vibrazioni elettriche dovrebbero propagarsi. E subito egli avanzò l' ipotesi che le vibrazioni che costituiscono la luce siano di natura elettrica. Questa ipotesi fu in seguito verificata, di guisa che ora l' intera teoria della luce non costituisce che un ramo della grande scienza dei fenomeni elettrici. Inoltre il tedesco Hertz, seguendo le idee di Maxwell, riuscì nel 1888 a produrre delle vibrazioni elettriche direttamente con mezzi elettrici. Le sue esperienze costituiscono la base dell'odierna telegrafia senza fili.

In epoca più recente si son fatte scoperte ancor più fondamentali e la scienza acquista di continuo una sempre maggior importanza teorica ed un sempre maggior interesse pratico. Questo rapido schizzo del suo sviluppo mette in luce come, con l' introduzione graduale delle idee teoriche appropriate, le quali, suggerite dagli esperimenti fatti, a loro volta suggeriscono nuovi esperimenti, un' intera massa di fenomeni isolati o addirittura insignificanti vengono a saldarsi assieme in un'unica scienza ben connessa, nella quale i risultati delle dedu-

---

[1] CLERK MAXWELL, *Electricity and Magnetism.*, vol. II, cap. III.

zioni matematiche astratte, ottenuti a partire da alcune leggi semplici ammesse in via di ipotesi, forniscono la spiegazione di quel complicato intrico che è il corso degli eventi.

Da ultimo, estendendo la nostra considerazione al di là delle scienze particolari dell'elettromagnetismo e della luce, possiamo generalizzare ulteriormente il nostro punto di vista e rivolgere la nostra attenzione allo sviluppo della fisica matematica considerandola come un unico grande capitolo nella storia del pensiero scientifico. Possiamo chiederci anzitutto quale sia stata, nelle sue linee più schematiche, la storia del suo sviluppo.

Essa non ebbe principio come una scienza unica, né ad opera di una sola categoria di uomini. I pastori caldei osservavano il cielo, funzionari del governo in Mesopotamia e in Egitto misuravano il terreno, sacerdoti e filosofi meditavano sulla natura del tutto. L'immenso stuolo dei fenomeni naturali appariva dovuto a forze misteriose ed impenetrabili. L'espressione «Il vento soffia dove a lui piace» esprime con esattezza l'ignoranza, allora dominante, di qualsiasi regola stabile cui si conformi in dettaglio la successione dei fenomeni. A grandi linee si poteva scorgere allora, come adesso, una certa regolarità negli eventi. Ma non era possibile scorgere in dettaglio le connessioni che han luogo fra di essi, e non si sapeva neppure come accingersi a costruire una scienza siffatta.

Tutto quanto poteva ottenersi allora si riduceva ad alcune riflessioni isolate ed a qualche congettura più o meno felice sulla natura delle cose.

Frattanto dall'agrimensura era nata la geometria, e l'osservazione del cielo rivelava la esatta regolarità del sistema solare. Alcuni degli ultimi greci, come Archimede, erano giunti a possedere alcune vedute sui fenomeni elementari dell' idrostatica e dell'ottica. In realtà Archimede riuniva in sé il genio matematico e la penetrante sagacia del fisico, e noi dobbiamo annoverarlo, insieme a Newton che visse due mila anni più tardi, tra i fondatori della fisica matematica. Egli visse a Siracusa, la

grande colonia greca della Sicilia, e allorché i romani assediavano la città (fra il 212 ed il 210 a. C.) si dice che egli abbia incendiato le loro navi concentrando su di esse i raggi solari a mezzo di specchi. Questo racconto è molto improbabile, ma costituisce una buona prova della fama che Archimede si era acquistato presso i contemporanei a motivo delle sue conoscenze nel campo dell'ottica. Al termine di questo assedio, egli venne ucciso. Secondo una versione data da Plutarco nella sua vita di Marcello, sarebbe stato scorto da un soldato romano mentre si trovava assorto nello studio di una figura geometrica che aveva tracciato sul pavimento sabbioso della sua abitazione; egli non obbedì subito agli ordini del soldato e così venne ucciso. Bisogna dire, ad onore dei generali romani, che i soldati avevano l' ordine di risparmiarlo. Molto forte è l'evidenza interna in favore dell'altro famoso episodio che si racconta di lui; infatti la scoperta che gli viene attribuita è in tutto degna del suo genio di matematico e di fisico. Fortunatamente essa è abbastanza semplice, di guisa che ci è possibile spiegarla qui in dettaglio. Si tratta di uno dei migliori esempi facilmente accessibili di quel metodo che consiste nell'applicazione di nozioni matematiche alla fisica.

Gerone, re di Siracusa, aveva inviato ad un orafo una certa quantità di oro perché ne facesse una corona. Egli sospettava che l'artefice avesse sottratto una parte dell'oro e l'avesse sostituita, fondendo il rimanente in lega con qualche metallo più vile. Gerone mandò la corona ad Archimede e gli chiese di esaminarla. Ai nostri giorni si dispone di un numero indefinito di metodi di esame per via chimica. Ma in quell'epoca Archimede si trovava a dover affrontare il problema per la prima volta. La soluzione gli balenò nella mente mentre egli si trovava nel bagno. Balzò in piedi ed attraversò di corsa le strade della città dirigendosi verso il palazzo e gridando: *Eureka! Eureka!* (Ho trovato, ho trovato). Se potessimo identificare quel giorno, dovremmo celebrarlo come la data di nascita della fisica matematica. La scienza entrò poi nella sua maggiore età quel giorno in cui Newton si

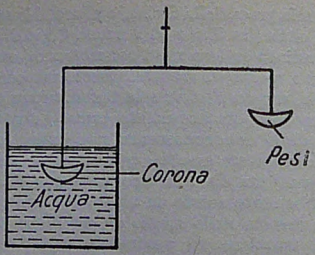

Fig. 3

trovava seduto nel suo giardino. In realtà Archimede aveva fatto una grande scoperta: egli giunse a scorgere che un corpo, immerso nell'acqua, è spinto verso l'alto dall'acqua circostante con una forza complessiva uguale al peso dell'acqua che esso sposta. Si può dare una dimostrazione teorica di questa legge fondandosi sui principi matematici dell'idrostatica; si può anche verificare sperimentalmente la legge stessa. Perciò se W libbre è il peso della corona nell'aria, e w libbre è il peso dell'acqua che essa sposta allorché viene immersa completamente, allora la forza diretta verso l'alto che occorre aggiungere per tenere sospesa la corona nell'acqua sarà W–w.

Ora si può determinare facilmente questa forza verso l'alto pesando il corpo mentre esso si trova sospeso nell'acqua così come è indicato nella figura annessa. Se i pesi che occorre collocare sul piatto della bilancia ammontano a F libbre, allora il peso della corona nell'acqua risulta di F libbre; perciò abbiamo:

$$\mathrm{F} = \mathrm{W} - w$$

e quindi

$$w = W - \mathrm{F}$$

e

$$\frac{\mathrm{W}}{w} = \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{W}-\mathrm{F}} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(A)}$$

dove W ed F risultano determinati mediante la facile e ben precisa operazione della pesatura. Quindi, in virtù dell'uguaglianza (A), risulta noto $\frac{W}{w}$ Ma $\frac{W}{w}$ è il rapporto tra il peso della corona ed il peso di un egual volume d'acqua. Questo rapporto rimane il medesimo per qualsiasi massa della stessa sostanza metallica: oggi lo si chiama peso specifico della sostanza in questione ed esso dipende soltanto dalla natura intrinseca della sostanza e non dalla forma o quantità di questa. Quindi, per accertare se la corona fosse d'oro, Archimede non aveva che da prendere una massa d'oro che fosse indiscutibilmente puro e trovarne il peso specifico col medesimo procedimento. Se i due pesi specifici risultavano identici la corona era d'oro puro, in caso contrario essa era adulterata.

Si è esposto ampiamente questa argomentazione poiché essa non soltanto costituisce il primo esempio preciso dell'applicazione di idee matematiche alla fisica, ma anche perché costituisce un esempio perfetto e semplice di quel che dev'essere in tutti i tempi il metodo e lo spirito della scienza.

La morte di Archimede per mano di un soldato romano è il simbolo di un rivolgimento storico di prima grandezza: i teorici greci con il loro amore per la scienza astratta furono sostituiti nel governo del mondo europeo dai pratici romani. Lord Beaconsfield in uno dei suoi romanzi ha definito l'uomo pratico come un uomo che pratica gli errori dei suoi antenati. I romani furono un grande popolo, ma essi portavano su di sè la maledizione della sterilità che si accompagna allo spirito pratico. Le loro conoscenze non progredirono rispetto a quelle dei loro antenati e tutti i loro progressi furono limitati ai minori dettagli tecnici dell' ingegneria. Non erano abbastanza visionari per giungere a punti di vista nuovi che potessero assicurare un più pieno dominio delle forze della natura. Nessun romano ebbe a perdere la vita per essersi trovato assorto nella contemplazione di una figura matematica.

Capitolo IV

LA DINAMICA

Il mondo dovette attendere milleottocento anni prima che i fisici matematici greci trovassero dei continuatori. Nei secoli XVI e XVII della nostra era alcuni grandi italiani e specialmente Leonardo da Vinci, l'artista (1452-1519) e Galileo (1564-1642) riscoprirono il segreto, già noto ad Archimede, di mettere in relazione le idee matematiche astratte con l' indagine sperimentale dei fenomeni della natura. Nel frattempo il lento progresso della matematica e l'accumularsi di conoscenze astronomiche esatte aveva messo i filosofi naturalisti in una posizione più favorevole per la ricerca. Inoltre la stessa tendenza all'autoaffermazione individualistica che dominava quell'epoca, il desiderio intenso di esperienze personali facevan sì che i pensatori di quel tempo cercassero di rendersi conto in modo diretto dell'andamento dei fenomeni; ed in tal modo fu praticamente scoperto il segreto della connessione di teoria matematica ed esperimento nel ragionamento induttivo. È un fatto eminentemente caratteristico di quell'epoca che Galileo, filosofo, facesse cadere dei pesi dalla torre pendente di Pisa. In ogni epoca esistono pensatori ed esistono uomini di azione; ma la fisica matematica è il prodotto di un'epoca in cui la tendenza al pensiero e la tendenza all'azione si trovarono riunite negli stessi uomini.

Questo fatto del lasciar cadere i pesi dalla torre caratterizza in modo pittoresco una conquista essenziale nel campo della conoscenza: si tratta addirittura della prima conquista di idee esatte intorno alla dinamica,

la scienza base nel campo in questione. Il punto particolare in discussione era se i corpi di peso differente cadessero dalla stessa altezza nello stesso tempo. Secondo un'affermazione di Aristotele, allora universalmente accettata, il peso maggiore avrebbe dovuto cadere più rapidamente. Galileo affermò che sarebbero caduti nello stesso tempo e diede una prova di questa sua affermazione facendo cadere dei pesi dall'alto della torre pendente. Le apparenti eccezioni alla regola sorgono tutte nei casi in cui per qualche motivo, come la leggerezza estrema dei corpi o la grande velocità di caduta, la resistenza dell'aria diviene un fattore importante. Ma se si fa astrazione dalla resistenza dell'aria la legge è esatta.

Il riuscito esperimento di Galileo non fu il risultato di una felice congettura. Esso fu possibile in quanto Galileo possedeva idee esatte a riguardo dell' inerzia e della massa. La prima legge del moto, così come noi la enunciamo seguendo Newton afferma: « Ogni corpo persevera nel suo stato di quiete o di moto uniforme rettilineo finché non sia costretto da una forza impressa a mutare tale stato ». Questa legge è qualcosa di più di un'arida formula, è un inno di trionfo sopra gli eretici sconfitti. È possibile comprendere il punto controverso se si toglie dall'enunciato della legge l'espressione « o di moto uniforme rettilineo ». Si ottiene allora l'opposta formula aristotelica: « Ogni corpo persevera nel suo stato di quiete finché non sia costretto da una forza impressa a mutare tale stato ».

In questa seconda formula, che è erronea, si afferma che, indipendentemente da una forza, un corpo persevera nello stato di quiete; e che quindi, se un corpo si muove, è necessario che una forza lo mantenga in moto, in guisa che, quando la forza vien meno, il moto cessa.

La legge newtoniana, quella vera, assume il punto di vista diametralmente opposto. Lo stato di un corpo non soggetto ad una forza è uno stato di moto uniforme rettilineo, e non occorre cercare alcuna forza od azione esterna che faccia da causa o, se preferite, da concomitante invariabile di questo moto uniforme rettilineo.

La quiete non è che un caso particolare di un moto siffatto, allorché la velocità è e rimane uguale a zero. Perciò, quando un corpo si muove, noi non andiamo in cerca di alcuna azione esterna, a meno che non si tratti di spiegare i mutamenti di velocità o i mutamenti di direzione. Finché il corpo si muove con la stessa velocità e nella stessa direzione non vi è alcun bisogno di ricorrere all' intervento di forze.

Si scorge bene la differenza fra i due punti di vista riferendosi alla teoria del moto dei pianeti. Il

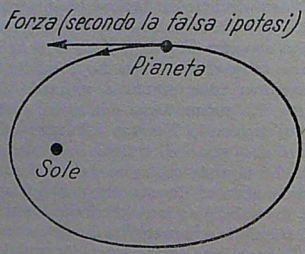

Fig. 4

polacco Copernico, nato a Thorn nella Prussia Occidentale (1473-1543) mostrò quanto fosse più semplice ammettere che i pianeti, compresa la terra, ruotino intorno al sole in orbite pressoché circolari; e dopo di lui Keplero, un matematico tedesco, dimostrò, nell'anno 1609, che in realtà le orbite in questione sono praticamente delle ellissi, cioè un tipo particolare di curve ovali che noi in seguito considereremo più dettagliatamente. Sorse subito il problema di determinare quali sono le forze che mantengono questo moto dei pianeti. Secondo la vecchia teoria erronea, che Keplero accettava, perché potesse conservarsi la stessa velocità attuale era necessaria una forza. Egli quindi cercava delle

forze tangenziali come quella indicata nella nostra figura (Fig. 4). Invece secondo il principio newtoniano, ammesso che non vi sia alcuna forza il pianeta dovrebbe muoversi indefinitamente con la sua velocità attuale lungo una linea retta e in tal modo allontanarsi definitivamente dal sole. Perciò Newton si trovò a dover cercare una forza che deviasse il moto facendogli seguire la sua orbita ellittica. Tale forza, egli dimostrò, dev'essere una forza diretta verso il sole come quella indicata nella figura qui sotto (Fig. 5). In effetto questa forza è l'at-

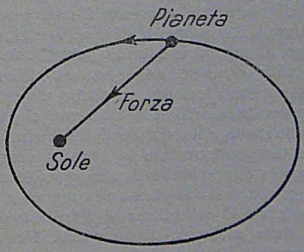

Fig. 5

trazione gravitazionale del sole, la quale agisce secondo la legge sopra enunciata: è cioè inversamente proporzionale al quadrato della distanza.

La scienza della meccanica sorse presso i greci dalla riflessione teorica sul vantaggio meccanico che si ottiene con l'uso della leva e dalla riflessione su vari problemi relativi al peso dei corpi. Essa fu posta definitivamente sulle sue giuste basi alla fine del secolo XVI e durante il secolo XVII, come risulta dall'esposizione precedente. Fu in parte con l' intento di chiarire la teoria dei gravi, ma soprattutto allo scopo di fornire una teoria scientifica dei moti planetari che si pervenne a tale risultato. Ma in seguito la dinamica si è assunta un

còmpito più ambizioso ed oggi essa pretende di essere la scienza fondamentale, della quale le altre scienze non sono che dei rami. Il contenuto di tale pretesa è il seguente: e cioè che le varie qualità degli oggetti che si manifestano ai sensi non sono altro che il nostro particolare modo di apprendere i mutamenti di posizione da parte degli oggetti esistenti nello spazio. Supponiamo ad esempio di guardare l'Abbazia di Westminster. Da secoli essa è lì, grigia ed immobile. Ma secondo la concezione scientifica moderna quel color grigio stesso che tanto contribuisce ad aumentare il senso dell' immobilità dell'edificio non è altro che il nostro modo di apprendere i rapidi movimenti di quelle ultime molecole che formano la superficie esterna dell'edificio e comunicano delle vibrazioni ad una sostanza chiamata etere. Inoltre noi posiamo le mani su quelle pietre e notiamo la loro temperatura fredda e uniforme che sembra un simbolo della tranquilla quiete dell'edificio. Ma questo senso della temperatura non fa altro che caratterizzare il nostro modo di avvertire il passaggio di calore dalla mano alla pietra o dalla pietra alla mano; e secondo la scienza moderna il calore non è altro che lo stato di agitazione delle molecole di un corpo. Finalmente comincia a suonare l'organo, ed ecco che ancora il suono non è altro che il risultato dei movimenti dell'aria che colpiscono il timpano dell'orecchio.

Cercar di fornire una spiegazione dinamica dei fenomeni significa dunque cercare di spiegarli mediante enunciati la cui forma generale è che la tale o talaltra sostanza o corpo si trovava in un determinato luogo e si trova ora in un altro determinato luogo. Si perviene in tal modo alla grande idea fondamentale della scienza moderna, e cioè all' idea che tutte le nostre sensazioni sono il risultato di un apprezzamento comparativo delle mutate configurazioni delle cose nello spazio in tempi diversi. Ne segue pertanto che le leggi del moto, cioè le leggi del mutamento di configurazione delle cose, sono le leggi fondamentali della fisica.

Nell'applicazione della matematica allo studio della

natura la scienza compie in maniera sistematica ciò che il pensiero ordinario compie invece soltanto incidentalmente. Quando ad esempio parliamo di una sedia intendiamo di solito riferirci a qualche cosa che noi abbiamo visto o che è stata comunque oggetto di sensazione da parte nostra; benché poi la maggior parte del nostro linguaggio venga a presupporre che vi è qualcosa che esiste indipendentemente dal nostro vedere o dal nostro sentire. Ora, nella fisica matematica si procede in modo opposto. La sedia viene pensata senza alcun riferimento ad un soggetto particolare o ad un particolare tipo di percezione. Il risultato è che per il nostro pensiero la sedia diventa un gruppo di molecole situate nello spazio od un gruppo di elettroni o una porzione dell'etere in movimento o che altro dir si voglia seguendo i dettami delle concezioni scientifiche correnti. In ogni caso il punto importante è che la scienza riduce la sedia a delle entità che si muovono nello spazio influenzando ciascuna i movimenti delle altre. In tal modo i vari elementi o fattori che entrano in un complesso di circostanze così concepito si riducono a quelle entità, come lunghezze lineari, ampiezze di angoli, aree e volumi, mediante le quali è possibile determinare la posizione dei corpi nello spazio. Naturalmente i fatti del moto e del cangiamento richiedono che in aggiunta a questi elementi geometrici vengano introdotti anche i gradi di cangiamento dei medesimi, vale a dire la velocità, le velocità angolari, le accelerazioni ed altre entità del genere. La fisica matematica quindi si occupa delle correlazioni tra i numeri variabili che si suppone rappresentino le correlazioni esistenti in natura tra le misure di questi elementi geometrici e dei loro saggi di cangiamento. Ma le leggi matematiche sempre riguardano delle variabili, ed è solo quando si vuole occasionalmente verificare le leggi mediante esperienze, o si vogliono usare le leggi per compiere delle previsioni particolari che vengono sostituiti dei numeri determinati.

Il punto interessante in questa concezione astratta del mondo che ci è fornita dalla fisica matematica e che

tien conto soltanto della posizione, della forma delle cose e dei loro cangiamenti, è che gli eventi di questo mondo astratto sono sufficienti per « spiegare » le nostre sensazioni. Quando noi udiamo un suono, le molecole dell'aria sono state agitate in un determinato modo: data l'agitazione, o le cosiddette onde sonore, tutti i soggetti normali odono il suono; e se non vi sono onde sonore, non vi è alcun suono. E in modo analogo alle altre forme di sensazione sottostà una causa o un origine o un evento parallelo (a seconda di come lo si voglia chiamare) di ordine fisico. Pare che i nostri stessi pensieri corrispondano a stati ed a processi del cervello; chè, se si lede il cervello resta menomato anche il pensiero. E intanto gli eventi di questo universo fisico si succedono l'un l'altro secondo leggi matematiche che non tengono alcun conto di tutte le sensazioni, di tutti i pensieri e di tutti i sentimenti particolari.

Ora non vi è dubbio che questo è l'aspetto generale del rapporto esistente tra il mondo della fisica matematica ed i nostri sentimenti, le nostre sensazioni ed i nostri pensieri; e su questo punto sono sorte molte controversie e si è versata una grande quantità di inchiostro. A noi occorre fare una sola osservazione. Questo stato di cose ha avuto origine dal tentativo di raffigurarci un mondo esterno che sia atto a « spiegare » le nostre svariate sensazioni ed i nostri svariati sentimenti, ma che non risulti d'altra parte essenzialmente dipendente da alcuna sensazione particolare o da alcun soggetto particolare. Un mondo siffatto è forse soltanto un mito? Ebbene, i miti sono fantastici ed arbitrari: se un mondo siffatto esiste davvero dev'esser possibile farne una descrizione esatta, che determini accuratamente le varie parti di esso e le loro reciproche relazioni. Ora in effetto questo mondo scientifico si presta ad un controllo del genere e ci permette di indagare e di predire i suoi eventi mediante l'apparato dei concetti matematici astratti. Sembra proprio che si abbia qui una verifica induttiva del nostro assunto iniziale. È vero che nessuna prova induttiva ha valore conclusivo, ma se la nozione di un

mondo che esiste indipendentemente dalle percezioni particolari che ne abbiamo fosse completamente erronea, occorrerebbe allora spiegare accuratamente come mai il nostro tentativo di caratterizzare un tale mondo mediante quella parte matematica delle nostre idee che si suole applicare ad esso, riesca ad avere un così notevole successo.

Ci allontaneremmo troppo dal nostro argomento se volessimo addentrarci in spiegazioni dettagliate delle altre leggi del moto. Il resto di questo capitolo va dedicato alla spiegazione di importanti nozioni che sono fondamentali tanto in fisica matematica quanto in matematica pura; si tratta delle nozioni delle quantità vettoriali e della regola del parallelogramma per l'addizione dei vettori. Abbiam visto come l'essenza del moto stia in ciò: che un corpo si trovava in A e si trova ora in C. Per definire in modo completo questo spostamento da A a C occorre determinarne due fattori distinti e cioè la sua grandezza (vale a dire la lunghezza AC) e la sua direzione. Ora un'entità che, come questo spostamento, è definita in modo completo mediante la determinazione di una grandezza e di una direzione vien chiamata vettore. Per esempio occorre assegnare una grandezza ed una direzione perché risulti definita una velocità: questa dev'essere di tante miglia all'ora in questa o in quella direzione. L'esistenza e l'indipendenza reciproca di questi due fattori che determinano la velocità sono chiaramente illustrate dall'azione del capitano di una nave il quale impartisce gli ordini relativi all'uno o all'altro di essi a subalterni diversi: egli indica al capo macchinista il numero di nodi a cui deve far procedere la nave e al timoniere la direzione della rotta che deve seguire. Il saggio di cangiamento della velocità, vale a dire l'aumento di velocità per unità di tempo, è poi anch'esso una quantità vettoriale, che vien chiamata accelerazione. Analogamente una forza, intesa nel senso dinamico, è un'altra quantità vettoriale. In effetto la natura vettoriale delle forze risulta subito, in base ai principi della dinamica, dalla natura vettoriale delle velocità

e delle accelerazioni; ma su questo punto non occorre che ci addentriamo. Basterà dire, qui, che una forza agisce su di un corpo con una certa intensità e in una certa direzione.

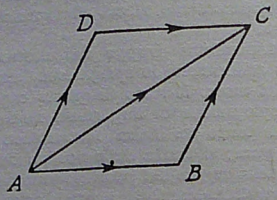

Fig. 6

Ora tutti i vettori si possono rappresentare graficamente mediante segmenti Basta stabilire:

I) una scala in base alla quale certe unità di lunghezza corrispondono a certe unità di grandezza del vettore (ad esempio la lunghezza di un pollice potrà corrispondere ad una velocità di 10 miglia orarie qualora si tratti di velocità, o alla forza costituita dal peso di 10 tonnellate qualora si tratti di forze;

II) una direzione della linea nel diagramma la quale corrisponda alla direzione del vettore. Se si traccia allora una linea lunga il numero opportuno di pollici ed avente la opportuna direzione, tale linea rappresenterà, nella scala di grandezza stabilità ad arbitrio, il vettore richiesto. La rappresentazione grafica dei vettori ha grande importanza. Con l'ausilio di essa possiamo enunciare la famosa «regola del parallelogramma» per l'addizione di vettori dello stesso genere ma aventi direzioni diverse.

Si consideri il vettore AC della figura 6 in modo che esso rappresenti la mutata posizione di un corpo da A a C: lo chiameremo il vettore della traslazione. Si noterà che, se la riduzione dei fenomeni fisici a semplici

cangiamenti di posizione così come la si è esposta sopra è legittima, allora tutti gli altri tipi di vettori fisici sono effettivamente riducibili, in un modo o nell'altro, a quel tipo particolare. Ora, la traslazione finale da A a C si può realizzare altrettanto bene mediante una traslazione da A a B ed un'altra traslazione da B a C, oppure, se si completa il parallelogramma ABCD, mediante una traslazione da A a D ed un'altra da D a C. Queste traslazioni che vengono realizzate così una dopo l'altra si dice che vengono addizionate. Questa non è che una definizione di ciò che intendiamo per addizione delle traslazioni. Si noti ancora che quando si considerino le linee parallele come linee aventi la stessa direzione, le traslazioni da B a C e da A a D possono venir considerate come la medesima traslazione applicata a corpi che si trovavano nelle due posizioni iniziali B ed A. Da questo punto di vista possiamo parlare della traslazione da A a D applicata ad un corpo che si trovi in qualsiasi posizione, per esempio in B. E allora potremo dire che la traslazione da A a C può concepirsi come la somma delle due traslazioni da A a B e da A a D applicate in qualsiasi ordine. Abbiamo qui la regola del parallelogramma per l'addizione delle traslazioni e cioè: se le traslazioni sono da A a B e da A a D, si completi il parallelogramma ABCD e allora la somma delle due traslazioni sarà la diagonale AC.

Tutto ciò potrà sembrare a prima vista molto artificioso. Ma va osservato che è la natura stessa che ci suggerisce quella nozione. Ad esempio: un piroscafo si muove nella direzione AD (cfr. la fig. 6) ed un uomo passeggia sul ponte del piroscafo. Se quest'ultimo fosse fermo, in un minuto l'uomo giungerebbe in B; ma durante quel minuto il suo punto di partenza A sul ponte si è spostato in D e la sua traiettoria sul ponte si è spostata da AB a DC, di guisa che in effetto la sua traslazione è stata da A a C rispetto alla superficie del mare. Tuttavia essa ci si presenta come la somma di due traslazioni, e cioè una da A a B rispetto al piroscafo ed una da A a D che è la traslazione del piroscafo.

Se si tien conto del fattore tempo che nel caso presente è di un minuto, questo diagramma della traslazione AC dell'uomo rappresenta la velocità. Infatti se AC rappresentava un certo numero di piedi di traslazione, ora esso rappresenta una traslazione di un certo numero di piedi al minuto, vale a dire rappresenta la velocità dell'uomo. E allora AB ed AD rappresentano due velocità e cioè la velocità dell'uomo rispetto al piroscafo e la velocità del piroscafo, la «somma» delle quali costituisce la velocità complessiva dell'uomo. È evidente che se si considerano i diagrammi come indicanti delle traslazioni per unità di tempo, i diagrammi e le definizioni riguardanti le traslazioni divengono diagrammi e definizioni riguardanti le velocità. I diagrammi e le definizioni riguardanti le velocità divengono poi diagrammi e definizioni riguardanti le accelerazioni se si considerano i diagrammi stessi come indicanti gli aumenti di velocità per unità di tempo.

Per addizione di vettori velocità e di vettori accelerazione noi intendiamo dunque l'addizione secondo la regola del parallelogramma.

Inoltre, secondo le leggi del moto una forza è rappresentata in modo adeguato dal vettore accelerazione che essa produce in un corpo di massa data. Di conseguenza si dirà che le forze si sommano quando il loro effetto congiunto è da valutarsi in base alla regola del parallelogramma.

Quindi per quanto riguarda i vettori fondamentali della scienza, e cioè le traslazioni, le velocità e le forze l'addizione di due qualsiasi di essi appartenenti allo stesso tipo è la formazione di un vettore «risultante» secondo la regola del parallelogramma.

Il tipo di gran lunga più semplice di parallelogramma è il rettangolo, e nella matematica pura è la relazione del particolare vettore AC coi due vettori componenti AB e AD tra loro perpendicolari (cfr. la fig. 7) che ricorre continuamente. Supponiamo che x, y ed r unità rappresentino le lunghezze di AB, AD ed AC, ed m unità angolari rappresentino l'ampiezza dell'angolo BAC. Al-

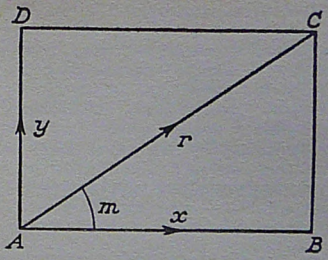

Fig. 7

lora le relazioni fra x, y, r ed m in tutti i loro molteplici aspetti sono l'argomento continuamente ricorrente nella matematica pura; e i risultati che si ottengono sono del tipo richiesto perché sia possibile la loro applicazione ai vettori fondamentali della fisica matematica. Questo diagramma costituisce il principale ponte attraverso il quale passano i risultati della matematica pura onde poter venire applicati ai fatti della natura.

CAPITOLO V

IL SIMBOLISMO MATEMATICO

Torniamo ora alla matematica pura per considerare quell'apparato di nozioni sulle quali è costruita tale scienza. Ci occuperemo anzitutto del simbolismo in essa usato, e cominceremo con i simboli più semplici ed universalmente noti, cioè con quelli dell'aritmetica.

Supponiamo per il momento di possedere idee sufficientemente chiare sui numeri interi rappresentati nella notazione arabica con 0, 1, 2..., 9, 10, 11..., 100, 101..., ecc. Questa notazione si introdusse in Europa attraverso l'intermediario degli arabi, ma sembra che questi l'abbiano appresa da fonti indiane. Il primo scritto a noi noto [1] in cui essa si trovi esposta in modo sistematico è l'opera di un matematico indiano di nome Bhaskara (nato nel 1114 d. C.). Ma per quanto concerne le cifre noi le troviamo usate già fin dal secolo VII dell'era volgare, ed esse vennero forse inventate nel Tibet. In ordine ai nostri scopi presenti, però, la storia della notazione non è che una questione di dettaglio. Il punto interessante da notare riguarda il modo meraviglioso in cui questo sistema numerale illustra l'enorme importanza di una buona notazione. Infatti una buona notazione alleviando la mente da ogni fatica non necessaria,

---

[1] Debbo soprattutto all'opera *A Short History of Mathematics* di W. W. R. BALL le notizie storiche particolareggiate riguardanti la matematica pura.

permette ad essa di concentrarsi su problemi ulteriori ed in effetto accresce la potenza mentale del genere umano. Prima che si introducesse la notazione arabica la moltiplicazione risultava difficile e la divisione, sia pure di numeri interi, chiamava in gioco le più alte facoltà matematiche. Probabilmente nessun fatto del mondo moderno avrebbe destato maggior meraviglia in un matematico greco quanto l'apprendere che, sotto l' influsso dell' istruzione obbligatoria, gran parte della popolazione dell' Europa occidentale sarebbe stata in grado di eseguire l'operazione della divisione coi più alti numeri. Un fatto simile gli sarebbe apparso nettamente impossibile. La conseguente estensione della notazione alle frazioni decimali non fu realizzata che nel secolo XVII. L'esser noi oggi in grado di calcolare facilmente con le frazioni decimali è il risultato quasi miracoloso della graduale scoperta di una notazione perfetta.

Spesso si considera la matematica come una scienza difficile e misteriosa a causa dei numerosi simboli che essa adopera. Naturalmente non vi è nulla che sia più incomprensibile di un simbolismo a noi ignoto. Inoltre è pure difficile seguire un simbolismo che ci sia noto solo parzialmente e che noi non siamo abituati ad usare. Esattamente nello stesso modo i termini tecnici di qualsiasi professione sono incomprensibili per coloro che non hanno appreso ad usarli. Ma la causa di ciò non è che essi siano difficili in sé stessi, anzi, essi vengono s mpre introdotti allo scopo di facilitare le cose. Così in matematica, ammesso che noi prestiamo una seria attenzione ai concetti matematici, il simbolismo viene invariabilmente a costituire una immensa semplificazione. Esso non è soltanto praticamente utile, ma è anche molto interessante. Viene infatti a costituire un'analisi dei concetti in questione ed una rappresentazione quasi pittorica delle loro relazioni reciproche. Se qualcuno dubita dell'utilità dei simboli provi a scrivere per esteso senza alcun simbolo di alcun genere tutto quanto il significato delle equaglianze seguenti le quali costituiscono alcune

delle leggi fondamentali dell'algebra [1]:

$$x + y = y + x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$(x + y) + z = x + (y + z) \quad \ldots\ldots (2)$$
$$x \times y = y \times x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$
$$(x \times y) \times z = x \times (y \times z) \quad \ldots\ldots (4)$$
$$x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z) \quad \ldots (5)$$

Qui la (1) e la (2) vengon chiamate rispettivamente la legge commutativa e la legge associativa dell'addizione, la (3) e la (4) sono le leggi commutativa ed associativa della moltiplicazione, e la (5) è la legge distributiva riguardante l'addizione e la moltiplicazione. Ad esempio se si vuol fare a meno dei simboli la (1) prende la forma seguente: Se ad un numero dato qualsiasi se ne aggiunge un secondo, il risultato è il medesimo che si otterrebbe aggiungendo al secondo numero il primo.

Questo esempio dimostra come sia possibile, mediante l'uso del simbolismo, compiere in modo quasi meccanico con un semplice colpo d'occhio dei passaggi discorsivi che diversamente esigerebbero l' intervento delle facoltà mentali superiori.

Il luogo comune, scritto nel quaderno di ogni scolaro e ripetuto, nei loro discorsi, da persone eminenti, secondo il quale noi dovremmo coltivare l'abitudine di pensare a quello che stiamo facendo è profondamente erroneo. Le cose stanno proprio al contrario: la civiltà progredisce a mano a mano che si va estendendo il numero delle attività importanti che noi riusciamo a compiere senza pensarci. Le operazioni del pensiero

---

[1] Nel leggere queste uguaglianze occorre tener presente che nel simbolismo matematico le parentesi vengono usate per indicare che le operazioni in esse contenute vanno eseguite per prime. Così $(1 + 3) + 2$ vuol dire che dobbiamo prima aggiungere 3 a 1 e poi aggiungere 2 al risultato; mentre $1 + (3 + 2)$ vuol dire che dobbiamo prima aggiungere 2 a 3 e poi aggiungere il risultato a 1. Ancora, un esempio numerico dell'uguaglianza (5) è: $2 \times (3 + 4) = (2 \times 3) + (2 \times 4)$. Noi eseguiamo per prime le operazioni nelle parentesi ed otteniamo: $2 \times 7 = 6 + 8$ che è manifestamente vera.

si possono paragonare alle cariche di cavalleria in una battaglia: queste infatti sono limitate nel loro numero, richiedono cavalli freschi e vanno fatte nei momenti decisivi.

Il sistema dei simboli occorre possieda una qualità importante: dovrebbe cioè essere conciso, in modo che lo si possa afferrare con un colpo d'occhio e lo si possa scrivere rapidamente. Ora, non si possono raggruppare i simboli in maniera più concisa che col metterli in immediata giustapposizione. Perciò in un buon sistema simbolico la giustapposizione dei simboli importanti dovrebbe avere un significato importante. Questo è uno dei meriti della notazione arabica per i numeri: per mezzo dei dieci simboli 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e della semplice giustapposizione essa simbolizza qualsiasi numero. Ancora, in algebra quando abbiamo due numeri variabili x ed y dobbiamo decidere che cosa debba denotare la loro giustapposizione $x\,y$. Ora le due nozioni più importanti che abbiamo sotto mano sono quelle dell'addizione e della moltiplicazione. I matematici hanno stabilito di rendere più conciso il loro simbolismo dando ad xy il significato di $x \times y$. Di conseguenza le leggi (3), (4) e (5) sopra indicate vengono generalmente scritte nella forma:

$$xy = yx \qquad (xy)z = x(yz), \qquad x(y + z) = xy + xz$$

con la quale si guadagna molto in concisione. La stessa regola simbolistica si applica nella giustapposizione di un numero determinato e di una variabile: in luogo di $3 \times x$ noi scriviamo $3x$, e in luogo di $30 \times x$ scriviamo $30x$.

È evidente che quando alle variabili si sostituiscono dei numeri determinati bisogna aver cura talvolta di reintrodurre il segno $\times$, onde evitare di mettersi in contrasto con le regole della notazione arabica. Così, quando in xy noi sostituiamo 2 a x e 3 a y occorre che in luogo di xy scriviamo 2×3 e non 23, che significherebbe $20 + 3$.

È interessante notare come un simbolo dall'aspetto

modesto possa avere una grande importanza per lo sviluppo della scienza. Esso può servire a presentarci in modo incisivo un concetto (spesso un concetto molto sottile) e può, con la sua esistenza, render facile la rappresentazione del rapporto in cui si trova tale concetto con tutta la complessa serie di concetti nella quale esso compare. Si prenda ad esempio il più modesto di tutti i simboli e cioè il simbolo o, che rappresenta il numero zero. Il sistema romano di notazione dei numeri non aveva un simbolo per indicare lo zero, e probabilmente la nozione del numero zero avrebbe messo in un terribile imbarazzo la maggior parte dei matematici antichi. Poiché, dopo tutto, si tratta di una nozione molto sottile e per nulla affatto ovvia. Nelle opere filosofiche si possono trovare moltissime discussioni sul significato di una quantità uguale a zero. Ma, a dir la verità, come concetto lo zero non presenta una maggior difficoltà o una maggior sottigliezza rispetto agli altri numeri cardinali. Infatti che cosa intendiamo per 1 o per 2 o per 3 ? Eppure l'uso di queste nozioni ci è famigliare anche se poi la maggior parte di noi si troverebbe imbarazzata qualora dovesse fornire un'analisi dettagliata delle nozioni più semplici che entrano a costituirle. Ciò che ha di speciale lo zero è che noi non abbiam bisogno di usarlo nelle operazioni della vita quotidiana: nessuno va fuori a comprare zero pesci. Si tratta in certo qual modo del più raffinato di tutti i numeri cardinali e l'uso di esso ci è imposto soltanto dalle esigenze del pensiero dotto. Ed il simbolo o, indicante il numero zero rende molti importanti servigi.

Questo simbolo si sviluppò in connessione col sistema arabico di notazione numerica del quale esso è parte essenziale. Infatti, in quel sistema di notazione il valore di una cifra dipende dalla posizione in cui essa viene a trovarsi. Si consideri ad esempio la cifra 5 così come essa figura nei numeri 25, 51, 3512 e 5213. Nel primo numero 5 significa cinque, nel secondo numero significa cinquanta, nel terzo cinquecento e nel quarto cinquemila. Ora, quando noi scriviamo il numero cin-

quantuno nella forma simbolica 51, la cifra 1 manda innanzi al secondo posto (da destra verso sinistra) la cifra 5, alla quale viene in tal modo attribuito il valore di cinquanta. Ma quando vogliamo simbolizzare il solo numero cinquanta non possiamo più servirci della cifra 1: ci occorre una cifra da situare nel posto delle unità la quale non aggiunga nulla all' insieme ma serva tuttavia a mandare innanzi il 5 al secondo posto. A tale scopo serve il simbolo o indicante lo zero. È molto probabile che coloro i quali introdussero il simbolo o per questo scopo non avessero in mente alcuna nozione precisa del numero zero. A loro occorreva semplicemente un segno il quale significasse che nel posto da esso occupato nell'ordine delle cifre non veniva aggiunto nulla. Probabilmente la nozione dello zero si andò formando a poco a poco sotto la spinta del desiderio di assimilare il significato di questo segno a quello dei segni 1, 2..., 9, i quali certamente rappresentano dei numeri cardinali. Non sarebbe l'unico caso di una nozione sottile introdottasi nella matematica per influsso di un simbolismo che in origine era dettato da ragioni di opportunità pratica.

Così il primo vantaggio dello o fu di render possibile la notazione arabica — un vantaggio non indifferente. Possiamo immaginare che essendo stato esso introdotto per questo scopo, gli uomini pratici di quel tipo cui non piacciono le fantasticherie, abbian deplorato la sciocca abitudine di indentificarlo con un numero: il numero zero. Ma essi avevano torto, come sempre han torto gli uomini di questa specie allorché abbandonano la loro funzione propria che è quella di masticare il cibo preparato da altri. Poiché il secondo servigio che venne reso dal simbolo o dipende essenzialmente dal fatto che si assegnò ad esso la funzione di simbolo del numero zero.

A prima vista questo secondo uso simbolico è di una semplicità talmente incredibile che è difficile far sì che il principiante riesca ad afferrarne l' importanza. Cominciamo con un esempio semplice. Nel capitolo II abbiamo accennato alla correlazione fra due numeri

variabili x ed y rappresentata dall'equazione $x + y = 1$. Questa può venir rappresentata in un numero indefinito di modi; per esempio nelle forme: $x = 1 - y$, $y = 1 - x$, $2x + 3y - 1 = x + 2y$, ecc. Ma il modo importante di formularla è:

$$x + y - 1 = 0$$

Analogamente il modo importante di scrivere l'equazione $x = 1$ è $x - 1 = 0$ e il modo importante di rappresentare l'equazione $3x - 2 = 2x^2$ è $2x^2 - 3x + 2 = 0$. Il punto principale è che tutti i simboli rappresentanti delle variabili come x ed y e tutti i simboli rappresentanti dei numeri determinati diversi da zero quali 1 o 2, vengono a trovarsi scritti a sinistra, in guisa che tutto il membro sinistro dell'equazione risulta equagliato a zero. Sembra che il primo a far ciò sia stato Tommaso Harriot, nato ad Oxford nel 1560 e morto nel 1621. Ma in che consiste l'importanza di questo semplice procedimento simbolico? Sta in ciò: che esso ha reso possibile il sorgere del moderno concetto della *forma algebrica*.

È questa una nozione sulla quale dovremo ritornare continuamente: non è esagerato dire che non vi è ramo della matematica moderna che possa venire compreso in modo adeguato senza un costante ricorso a tale nozione. Il concetto di forma è così generale che riesce difficile definirlo in termini astratti. Sarà meglio che per ora ci limitiamo a considerarne alcuni esempi. Così le equazioni $2x - 3 = 0$, $x - 1 = 0$, $5x - 6 = 0$ son tutte equazioni della stessa forma, e cioè equazioni contenenti una sola incognita x che non viene moltiplicata per sé stessa, in guisa che in tali equazioni non vengono a figurare x^2, x^3, ecc. Così pure $3x^2 - 2x + 1 = 0$, $x^2 - 3x + 2 = 0$, $x^2 - 4 = 0$ sono tutte equazioni della stessa forma, e cioè equazioni contenenti una sola incognita x e nelle quali figura $x \times x$ vale a dire x^2. Queste equazioni vengon dette equazioni quadratiche. Analogamente le equazioni cubiche nelle quali compare x^3 dan luogo ad un'altra forma,

e così via. Nelle tre equazioni quadratiche date sopra vi è una differenza secondaria fra l'ultima equazione $x^2 - 4 = 0$ e le due precedenti, differenza dovuta al fatto che x (in quanto distinta da x^2) non figura nell'ultima equazione e figura invece nelle altre due. Questa distinzione è di ben scarsa importanza di fronte al grande fatto che tutte e tre le equazioni sono quadratiche.

Vi sono poi le forme di equazioni che stabiliscono delle correlazioni fra due variabili, come ad esempio: $x + y - 1 = 0$, $2x + 3y - 8 = 0$, ecc. Questi sono esempi di ciò che vien chiamata equazione di forma *lineare*. La ragione per cui si usa questo termine « lineare » è che nel metodo di rappresentazione grafica che abbiamo esposto verso la fine del capitolo II un'equazione di questo tipo viene sempre rappresentata da una linea retta. Vi sono poi altre forme di equazioni a due variabili come ad esempio la forma quadratica, quella cubica ecc. Ma il punto sul quale intendiamo qui insistere è che questo studio della forma risulta facilitato, anzi viene addirittura reso possibile dall'abitudine sistematica di scrivere le equazioni con il simbolo o per membro destro.

Lo o ha ancora un'altra funzione in rapporto allo studio della forma. Qualunque sia il numero x, si ha sempre $0 \times x = 0$ e $x + 0 = x$. Per mezzo di queste proprietà si possono eliminare alcune differenze secondarie di forma. Così la differenza sopra accennata fra le equazioni quadratiche $x^2 - 3x + 2 = 0$ e $x^2 - 4 = 0$ scompare se si scrive la seconda equazione nella forma $x^2 + (0 \times x) - 4 = 0$ (Poiché per le leggi sopra enunciate si ha $x^2 + (0 \times x) - 4 = x^2 - 4$). Quindi l'equazione $x^2 - 4 = 0$ non rappresenta che una particolare classe di equazioni quadratiche e rientra anch'essa nella forma generale come la $x^2 - 3x + 2 = 0$.

Per i tre motivi indicati il simbolo o indicante il numero zero è essenziale per la matematica moderna. Esso ha reso possibili dei tipi di indagini che diversamente non si sarebbero potute compiere.

In realtà il simbolismo della matematica è una conseguenza dei concetti generali che dominano tale scienza.

Noi abbiamo ora dinanzi due di questi concetti: quello della variabile e quello della forma algebrica. La riunione di questi due concetti ha fatto sì che si introducesse nella matematica un altro tipo di simbolismo, un po' strano forse ma nondimeno efficace. Abbiam visto come un'equazione contenente due variabili x e y indichi una correlazione particolare fra la coppia di tali variabili. Così la $x + y - 1 = 0$ indica una sola correlazione determinata e la $3x + 2y - 5 = 0$ indica un'altra correlazione determinata tra le variabili x ed y; ed entrambe queste correlazioni han la forma di quella che abbiam chiamato correlazione lineare. Ora però ci chiediamo: Come è possibile rappresentare una correlazione lineare *qualsiasi* tra i numeri variabili x ed y? Qui ci occorrono dei simboli che rappresentino *qualsiasi* correlazione lineare, proprio nello stesso modo in cui x rappresenta un *qualsiasi* numero. Ciò si ottiene tramutando in lettere i numeri che figurano nella correlazione determinata $3x + 2y - 5 = 0$. Si ha allora: $ax + by - c = 0$. Qui a, b e c rappresentano dei numeri variabili proprio come avviene per x ed y, ma vi è una differenza nel modo in cui vengono usati i due gruppi di variabili. Noi studiamo le proprietà generali che le relazioni fra x ed y presentano quando a, b e c conservano valori immutati. Noi non determiniamo i valori di a, b e c; ma qualunque essi siano, tali valori rimangono immutati mentre noi studiamo la relazione che intercorre fra le variabili x ed y per l' intero gruppo dei possibili valori di x e di y. Ma quando abbiamo trovate le proprietà di questa correlazione noi osserviamo che, siccome a, b e c non sono stati in realtà determinati, le proprietà che abbiamo dimostrate devono appartenere a *qualsiasi* relazione di quel tipo. Se ora poi facciamo variare a, b e c noi giungiamo a concepire la $ax + by - c = 0$ come indicante una correlazione lineare variabile fra x ed y. Rispetto ad x e ad y le tre variabili a, b e c vengon dette costanti. Le variabili usate in questa guisa vengono anche chiamate talvolta parametri.

Ora i matematici evitano di solito il disturbo di

dover spiegare quali sono tra le variabili da essi usate quelle che van trattate come « costanti » e quelle che van trattate come variabili da considerarsi correlate nelle equazioni in questione; ed evitano tale disturbo adoperando le ultime lettere dell'alfabeto per indicare le variabili « variabili » e le prime lettere dell'alfabeto per indicare le variabili « costanti » o parametri. Naturalmente i due gruppi di lettere vengono a confondersi verso la metà dell'alfabeto, cosicché si rendono necessarie talvolta due parole di spiegazione. Ma, in realtà, bastano di solito la consuetudine ed il buon senso; e gli equivoci causati da questa procedura che può sembrare così imprecisa sono straordinariamente rari.

Il risultato di questa continua eliminazione dei numeri determinati che vengono sostituiti da successivi ordini di parametri è che la quantità di operazioni aritmetiche eseguite dai matematici diviene estremamente piccola. Molti matematici non amano i calcoli numerici e non posseggono alcuna speciale attitudine ad eseguirne. Il territorio dell'aritmetica finisce là dove cominciano a dominare le due nozioni delle « variabili » e della « forma algebrica ».

CAPITOLO VI

LE SUCCESSIVE GENERALIZZAZIONI DEL CONCETTO DI NUMERO

Un' importante caratteristica della matematica ci vien presentata da quell' insieme di nozioni derivate che furono introdotte in connessione coi numeri interi dai quali abbiam preso le mosse. Queste nozioni si possono considerare come delle estensioni o generalizzazioni del concetto di numero. Vi è anzitutto la nozione delle frazioni. Il primo trattato di aritmetica da noi posseduto fu scritto da un sacerdote egiziano di nome Ahmes tra il 1700 ed il 1100 a. C. ed è probabilmente la copia di un'opera molto più antica. Esso tratta in modo diffuso delle proprietà delle frazioni. Sembra dunque che questa nozione si sia sviluppata molto presto nella storia della matematica. Si tratta in realtà di una nozione molto ovvia: dividere un campo in tre parti e prendere due di queste parti è un genere di operazione che dev'esser stata spesso eseguita. Non dobbiamo quindi trovar strano che a degli uomini delle civiltà più antiche fossero famigliari la nozione di due terzi o nozioni simili. Considereremo dunque quale prima generalizzazione del concetto di numero la nozione delle frazioni. I greci ebbero la tendenza a pensare le frazioni soprattutto come dei rapporti, in guisa che per un greco il modo naturale di esprimersi sarebbe stato di dire che una linea lunga due piedi si trova rispetto ad una linea lunga tre piedi nel rapporto di 2 a 3. Noi invece sotto l' influsso del nostro sistema di notazione algebrica siamo più inclini a dire

che una linea è lunga i due terzi dell'altra ed a concepire i due terzi come un coefficiente numerico.

In connessione con la teoria del rapporto o delle frazioni i greci fecero una grande scoperta che diede luogo ad un cumulo di riflessioni non solo matematiche ma anche filosofiche: essi scoprirono l'esistenza di rapporti « incommensurabili ». Giunsero infatti nel corso delle loro indagini geometriche a dimostrare che, se si parte da un segmento di lunghezza qualsiasi, devono esistere altri segmenti di lunghezza tale che il loro rapporto con la lunghezza originaria non può esser espresso da alcuna coppia di numeri interi — o, in altre parole, che esistono lunghezze le quali non sono mai una frazione esatta della lunghezza data.

Ad esempio non si può in alcun modo esprimere la diagonale di un quadrato sotto forma di frazione del lato dello stesso quadrato. Nella nostra notazione moderna la lunghezza della diagonale è $\sqrt{2}$ volte la lunghezza del lato; ma non vi è alcuna frazione che rappresenti esattamente $\sqrt{2}$. Possiamo approssimarci a $\sqrt{2}$ quanto vogliamo, ma non raggiungeremo mai il suo valore esatto. Ad esempio $\frac{49}{25}$ è un po' meno di 2 e $\frac{9}{4}$ è maggiore di 2, in guisa che $\sqrt{2}$ viene a trovarsi fra $\frac{7}{5}$ e $\frac{3}{2}$. Ma il migliore procedimento sistematico per avvicinarsi a $\sqrt{2}$ con una successione di frazioni decimali, ciascuna maggiore della precedente, è il procedimento ordinario per l'estrazione delle radici quadrate; e pertanto la successione risulta: 1, $\frac{14}{10}$, $\frac{141}{100}$, $\frac{1414}{1000}$, ecc.

I rapporti di questo genere vennero chiamati dai greci incommensurabili. Dall'epoca dei greci in poi essi han sollevato moltissime discussioni filosofiche e solo di recente son state chiarite le difficoltà connesse con tale argomento.

Metteremo i rapporti incommensurabili accanto alle

frazioni e considereremo l' intero complesso dei numeri interi, dei numeri frazionari e dei numeri incommensurabili o « irrazionali » come costituente un'unica classe che chiameremo la classe dei « numeri reali ». Noi pensiamo sempre i numeri reali come disposti in ordine di grandezza dallo zero in avanti, in modo che essi crescono indefinitamente man mano che si procede. I numeri reali vengono opportunamente rappresentati con dei punti su di una retta. Sia la OX una semiretta qualsiasi limitata

$$0 \quad \frac{1}{2} \quad 1 \quad \frac{3}{2} \quad 2 \quad \frac{5}{2} \quad 3 \quad \frac{7}{2} \quad 4$$

O M A N B P C Q D X

in O e prolungantesi indefinitamente nella direzione OX. Si prenda su di essa un punto qualsiasi A in modo che OA rappresenti l'unità di lunghezza e si prendano poi tante lunghezze AB, BC, CD, ecc. tutte uguali ad OA. Allora il punto O rappresenterà il numero 0, il punto A il numero 1, il punto B il numero 2 e così via. In effetto il numero rappresentato da un qualsiasi punto è la misura della distanza di questo punto da O, calcolata assumendo come unità di misura il segmento OA. I punti compresi fra O ed A rappresentano le frazioni proprie ed i numeri irrazionali minori di 1, il punto medio di OA rappresenta $\frac{1}{2}$, il punto medio di AB rappresenta $\frac{3}{2}$, quello di BC rappresenta $\frac{5}{2}$ e così via. In tal modo ogni punto sulla OX rappresenta un numero reale ed ogni numero reale è rappresentato da un punto sulla OX.

Se a partire da O procediamo ordinatamente nella direzione OX, la serie o fila di punti lungo la OX rappresenta i numeri reali disposti in ordine di grandezza crescente in modo che partendo da zero essi aumentano continuamente a mano a mano che noi avanziamo.

Tutto ciò pare abbastanza semplice; ma già a questo punto, riflettendo su questi fatti ovvi, si possono gua-

dagnare alcune nozioni interessanti. Si consideri la serie dei punti che rappresentano i soli numeri interi, e cioè i punti O, A, B, C, D, ecc. Vi è qui un primo punto O, un punto successivo determinato A, e ciascun punto come A o B ha un immediato antecedente determinato ed un immediato successivo determinato, ad eccezione di O il quale non ha antecedente; inoltre la serie continua indefinitamente e non ha un termine ultimo. Questa specie di ordine vien chiamata il tipo di ordine degli interi ed il suo tratto caratteristico è dato dall'esistenza di vicini immediati sia a destra che a sinistra, fatta eccezione per il termine che occupa il primo posto nella serie. Ancora, si considerino tutti assieme gli interi e le frazioni, tralasciando i punti che corrispondono ai rapporti incommensurabili. La specie di insieme che otteniamo questa volta è completamente diverso dal precedente. Vi è bensì un primo termine o; ma nessun termine ha un antecedente immediato od un successivo immediato. Si vede facilmente che è così, poiché tra due frazioni qualsiasi noi possiamo sempre trovare un'altra frazione avente un valore intermedio. Un modo semplice per fare ciò è di addizionare le due frazioni e di dividere per due il risultato. Ad esempio fra $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$ vi è la frazione $\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\right)$ e cioè $\frac{17}{24}$; e fra $\frac{2}{3}$ e $\frac{17}{24}$ la frazione $\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}+\frac{17}{24}\right)$, cioè $\frac{33}{48}$, e così di seguito indefinitamente. A motivo di questa proprietà si dice che l'insieme in questione è «denso». Non vi è un punto terminale nella serie poiché questa cresce indefinitamente e senza un limite man mano che noi procediamo lungo la linea OX. Sembrerebbe, a prima vista, che il tipo di insieme in tal modo ottenuto con le frazioni, sempre includendo gli interi, debba risultare il medesimo di quello che si ottiene prendendo tutti i numeri reali: interi, frazioni ed irrazionali, vale a dire prendendo tutti i punti della linea OX. Tutto quanto abbiam

detto finora dell' insieme delle frazioni si applica altrettanto bene all' insieme di tutti i numeri reali. Senonché vi sono delle differenze importanti che ci accingiamo ora a sviluppare. La mancanza degli irrazionali nell' insieme delle frazioni fa sì che vengano a mancare i punti terminali di certe classi. Si consideri ad esempio l' irrazionale $\sqrt{2}$. Nella serie dei numeri reali esso si trova compreso fra tutti i numeri i cui quadrati sono minori di 2 e tutti i numeri i cui quadrati sono maggiori di 2. Ma se ci si ferma all' insieme delle sole frazioni e non si prendono in considerazione gli irrazionali in guisa che non risulta possibile introdurre $\sqrt{2}$ allora non vi è alcuna frazione che sia fornita della proprietà di dividere l' insieme in due parti in modo che tutti i membri giacenti da una parte abbiano i quadrati minori di 2 e tutti i membri giacenti dall'altra parte abbiano i quadrati maggiori di 2. E perciò nell' insieme delle frazioni vi è una quasi-lacuna là dove dovrebbe inserirsi $\sqrt{2}$. Questa presenza di quasi-lacune nell' insieme delle frazioni potrà sembrar un fatto trascurabile; ma qualsiasi matematico cui accada di leggere queste pagine sa che l'eventuale assenza di limiti o di massimi in una classe di numeri la quale tuttavia non abbraccia l' intero insieme dei numeri è uno svantaggio non lieve. È per evitare questa difficoltà che si fa ricorso agli irrazionali, in modo da ottenere un insieme completo senza lacune.

Vi è un'altra differenza, ancor più fondamentale fra i due insiemi. Noi possiamo ridisporre le frazioni in una serie simile a quella degli interi, in modo cioè che essa abbia un primo termine e che ciascun termine abbia poi un successivo immediato e (fatta eccezione per il primo termine) un immediato antecedente. Possiamo indicare in che modo si può far questo. Si scrivono sotto forma frazionaria tutti i termini dell' insieme della frazioni e degli interi, ponendo cioè $\frac{1}{1}$ in luogo di 1, $\frac{2}{1}$ in luogo di 2 e così via per tutti gli interi ad esclusione dello 0. Inoltre per il momento si considereranno come

distinte le frazioni eguali in valore ma non ridotte ai minimi termini, in guisa ché, ad esempio, fino a nuovo avviso $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{8}{12}$, ecc. saran tutte considerate come frazioni distinte. Ora raggruppiamo le frazioni in classi addizionando il numeratore ed il denominatore di ciascun termine. Per brevità chiameremo indice di una frazione questa somma del suo numeratore e del suo denominatore. Così 7 sarà l' indice di $\frac{4}{3}$, come pure di $\frac{3}{4}$ e di $\frac{2}{5}$. Le frazioni di ogni singola classe siano tutte le frazioni aventi un determinato indice, il quale pertanto potrà anche chiamarsi l' indice della classe. La prima classe ha indice 2 e l'unico membro di essa è $\frac{1}{1}$; la seconda classe ha indice 3 e i suoi membri sono $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{1}$; la terza classe ha indice 4 e i suoi membri sono $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{1}$; la quarta classe ha indice 5 e si suoi membri sono $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{1}$, e così via. È facile scorgere che il numero dei membri appartenenti ad una classe (sempre includendo le frazioni non ridotte ai minimi termini) è uguale all' indice diminuito di un'unità. I membri di ogni singola classe possono inoltre venire disposti in ordine, considerando come primo membro la frazione col numeratore 1, come secondo membro quella col numeratore 2 e così via fino a quella col numeratore $(n - 1)$, dove n è l' indice. Così per la classe di indice n, i membri risulteranno disposti nell'ordine:

$$\frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-2}, \frac{3}{n-3}, \ldots\ldots, \frac{n-1}{1}.$$

I membri delle prime quattro classi vennero presentati appunto in quest'ordine. E così tutto l' insieme delle frazioni è stato ora disposto in un ordine simile a quello degli interi. Esso è il seguente:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \left[\frac{2}{2}\right], \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \ldots\ldots$$

$$\frac{n-2}{1}, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-2}, \frac{3}{n-3}, \ldots\ldots, \frac{n-1}{1}, \frac{1}{n},$$

e così via.

Possiamo ora eliminare tutte le ripetizioni di frazioni aventi lo stesso valore col semplice cancellarle quando esse si ripresentano dopo la prima volta. Nel piccolo gruppo di termini iniziali riportati sopra la frazione $\frac{2}{2}$ racchiusa in parentesi quadre è l'unica che non si trovi ridotta ai minimi termini. Essa è già apparsa nella forma $\frac{1}{1}$ e perciò va cancellata. Ma la serie conserva ancora le medesime proprietà e cioè *a*) vi è un primo termine, *b*) ogni termine ha dei vicini immediati, *c*) la serie continua indefinitamente.

Si può dimostrare che non è possibile disporre l' intero insieme dei numeri reali in questa maniera. Questo fatto curioso fu scoperto da Georg Cantor, un matematico tedesco tuttora vivente; esso ha la massima importanza nella filosofia della matematica. Siamo proprio sulla soglia dei grandi problemi relativi al significato della continuità e dell' infinito.

Un'altra amplificazione del campo numerico si ha con l' introduzione di quella nozione che è stata variamente denominata un'operazione od un passo, nomi entrambi appropriati rispettivamente da due punti di vista leggermente diversi. Prenderemo le mosse da un caso particolare. Si consideri l'enunciato $2 + 3 = 5$: noi aggiungiamo 3 a 2 ed otteniamo 5. Si pensi ora all'operazione dell'aggiungere 3 e questa venga indicata con $+ 3$. Possiamo avere inoltre $4 - 3 = 1$. Si pensi

allora all'operazione del sottrarre 3 e questa venga indicata con -3. Così invece di considerare i numeri reali in sé stessi, noi consideriamo le *operazioni* dell'aggiungere o del sottrarre tali numeri: invece di 2 considereremo $+2$ e -2 cioè le operazioni dell'aggiungere 2 e del sottrarre 2. Allora riuscirà possibile addizionare queste operazioni, intendendo naturalmente l'addizione in un senso differente da quello in cui si dice che addizioniamo i numeri. La somma di due operazioni è quell'operazione che da sola ha lo stesso effetto delle due operazioni eseguite successivamente. Ci si puo chiedere in quale ordine debbano essere eseguite le due operazioni; e la risposta è che la cosa risulta indifferente; poiché ad esempio

$$2 + 3 + 1 = 2 + 1 + 3$$

in guisa che l'addizione dei passi $+3$ e $+1$ è commutativa.

I matematici hanno un'abitudine che mette nell' imbarazzo coloro che sono impegnati nell'analisi dei significati ma che in pratica è molto conveniente: son soliti cioè servirsi di uno stesso simbolo in sensi differenti anche se affini. Per loro l'unico requisito essenziale di un simbolo è che, per diversi che siano i suoi significati, le leggi formali per l'uso di esso restino sempre le stesse. E perciò possiamo scrivere:

$$(+3) + (+1) = +4$$

dove quel $+$ che si trova a metà del primo membro indica l'addizione delle operazioni $+3$ e $+1$. Ma in seguito non sarà necessario esser così pedanti nel nostro simbolismo eccetto che in rari casi nei quali si stiano analizzando dei significati; quindi tralasceremo sempre il primo $+$ della riga e le parentesi e non scriveremo mai due segni $+$ di seguito. In tal modo l'eguaglianza precedente diviene:

$$3 + 1 = 4$$

e noi la interpretiamo o come semplice addizione di numeri, o come quella più elaborata addizione di operazioni

che si trova espressa in maniera completa nel primo modo di scrivere l'eguaglianza, o infine come esprimente il risultato cui si perviene applicando l'operazione $+ 1$ al numero 3 così da ottenere il numero 4. Ogni interpretazione che risulti possibile è sempre legittima. Ma l'unica interpretazione che, sotto certe condizioni, risulta sempre possibile è quella delle operazioni. Le altre interpretazioni dànno spesso risultati privi di senso.

Questo ci conduce subito ad una questione che deve essersi affacciata con insistenza alla mente del lettore; e cioè: a che cosa servono tutte queste complicazioni? E certamente a questo punto si farà avanti il nostro amico, l'uomo pratico, a dirci di spazzar via tutte queste sciocche fisime del cervello. La risposta è che ciò a cui tende il matematico è la Generalità. È questa una nozione che per la sua importanza nel dirigere i procedimenti matematici può venire a buon diritto posta accanto alle due nozioni della Variabile e della Forma. L'istinto matematico aborre da ogni limitazione di qualsiasi genere che venga imposta alla generalità dei teoremi, delle dimostrazioni o delle interpretazioni. Queste tre nozioni della variabile, della forma e della generalità formano una specie di trinità matematica la quale domina tutto il campo della scienza in questione. Tutte e tre nascono da una stessa radice e cioè dalla natura astratta di quella scienza.

Vediamo in che modo si riesce ad ottenere la generalità con l'introduzione di questa nozione delle operazioni. Si prenda l'equazione $x + 1 = 3$, la cui soluzione è $x = 2$. Qui noi possiamo interpretare i nostri simboli come semplici numeri onde il ricorso alle «operazioni» è del tutto superfluo. Invece l'equazione $x + 3 = 1$ risulta priva di senso se si interpreta x come un semplice numero. Infatti x dovrebbe essere il numero di oggetti che rimangono quando si sono tolti 3 oggetti da 1 oggetto; e un'operazione come questa non è possibile. A questo punto entra in campo la nostra nozione della forma algebrica, la quale non è poi altro che la

nozione della generalizzazione vista sotto un altro aspetto. Noi consideriamo pertanto l'equazione generale avente la stessa forma della $x + 1 = 3$. Questa equazione è $x + a = b$ che ha per soluzione $x = b - a$. È qui che la difficoltà si fa acuta, poiché questa forma può essere usata per interpretazioni numeriche soltanto se b è maggiore di a, di guisa che non ci è possibile affermare incondizionatamente che a e b possono essere due costanti qualsiasi. In altri termini noi abbiamo introdotto una limitazione alla variabilità delle « costanti » a e b, limitazione che dovremo trascinarci dietro come una catena in tutto il nostro procedimento. In tali condizioni sarebbe impossibile condurre delle indagini matematiche veramente estese: ogni equazione finirebbe col trovarsi sepolta sotto un cumulo di limitazioni. Se invece noi ora interpretiamo i nostri simboli come « operazioni » tutte le limitazioni spariscono come per incanto. L'equazione $x + 1 = 3$ ci dà $x = +2$, l'equazione $x + 3 = 1$ ci dà $x = -2$, l'equazione $x + a = b$ ci dà $x = b - a$ che potrà essere, a seconda del caso un'operazione di addizione o di sottrazione. Noi non siamo mai obbligati a decidere se $b - a$ debba rappresentare l'operazione di addizione o quella di sottrazione, poiché in entrambi i casi le norme che regolano il modo di procedere mediante i simboli sono le stesse.

Non rientra nel piano di quest'opera scrivere un capitolo particolareggiato di algebra elementare. Il nostro intento è solo di chiarire le nozioni fondamentali che governano lo sviluppo della nostra scienza. Di conseguenza non ci addentreremo nella spiegazione delle regole particolareggiate in conformità alle quali vengono moltiplicati o altrimenti combinati i « numeri positivi e negativi ». Abbiamo spiegato sopra come i numeri positivi e negativi siano delle operazioni. Essi sono stati chiamati anche « passi ». Così $+3$ è il passo col quale andiamo da 2 a 5 e -3 è il passo col quale andiamo a ritroso da 5 a 2. Si consideri la semiretta OX suddivisa nel modo che è stato indicato nella prima parte di questo capitolo, in guisa che i suoi punti rappresentino i nu-

meri. Allora $+2$ è il passo da O a B, o da A a C o (se si prosegue la suddivisione a ritroso lungo la OX') da C'

X'	D'	C'	B'	A'			+1	+2	+3		
		−3	−2	−1	O	A	B	C	D	E	X

ad A', o da D' a B', ecc. Analogamente -2 è il passo da O a B' o da B' a D' o da B a O, o da C ad A.

Noi possiamo considerare il punto che vien raggiunto mediante un passo a partire da O come rappresentante tale passo. Così A rappresenta $+1$, B rappresenta $+2$, A' rappresenta -1, B' rappresenta -2 e così via. Si noterà che, mentre prima coi soli numeri reali «privi di segno» soltanto i punti situati da un'unica parte rispetto ad O e cioè lungo la OX rappresentavano dei numeri, ora invece con l' introduzione dei passi tutti i punti dell' intera retta che si estende da entrambe le parti rispetto ad O rappresentano dei passi. È questa una rappresentazione intuitiva di quella più ampia generalità che si è introdotta per mezzo dei numeri positivi e negativi, vale a dire per mezzo delle operazioni o passi. In questi numeri «forniti di segno» abbiamo inoltre dei casi particolari di quelli che abbiam chiamati vettori (dal latino *veho*: conduco, trasporto). Noi infatti possiamo pensare ad un punto che venga trasportato da O in A o da A in B.

Quando, alcune pagine addietro immaginavamo l'uomo pratico con il suo atteggiamento ostile di fronte alle sottigliezze implicite nell' introduzione dei numeri positivi e negativi, noi stavamo in realtà calunniando quell'eccellente individuo. Poiché in effetto noi ci troviamo qui di fronte ad uno dei suoi maggiori trionfi. Se si deve dire la verità, fu proprio l'uomo pratico ad usare per primo i simboli $+$ e $-$. L'origine di questi non è molto sicura, ma sembra estremamente probabile che essi sian sorti dai segni fatti col gesso sopra casse di merci depositate in magazzini tedeschi, allo scopo di indicare l'eccesso o il difetto rispetto ad un certo peso stabilito. Il primo accenno ad essi si trova in un libro pubblicato a Lipsia nel 1489. In matematica sembra

siano stati impiegati per la prima volta da un matematico tedesco, lo Stifel, in un libro pubblicato a Norimberga nel 1544. Ma in fondo è soltanto di recente che si è giunti a considerare i tedeschi come una nazione decisamente pratica. C' è un vecchio epigramma che assegna agli inglesi l' impero del mare, ai francesi quello della terra ed ai tedeschi quello delle nuvole. Certamente fu dalle nubi che i tedeschi trassero il + ed il —; le nozioni generate da questi simboli sono così importanti per il benessere dell'umanità che non possono esserci venute dal mare o dalla terra.

Le possibilità di applicazione dei numeri positivi e negativi sono molto ovvie. Se le lunghezze in un senso sono rappresentate da numeri positivi, allora quelle nel senso opposto saranno rappresentate da numeri negativi. Se la velocità in un senso è positiva, allora la velocità in senso opposto sarà negativa. Se la rotazione sopra un quadrante nel senso opposto a quello delle lancette dell'orologio (senso antiorario) è positiva, allora la rotazione in senso orario sarà negativa. Se un conto in banca è positivo, una cambiale da pagare sarà negativa. Se l'elettricità vitrea è positiva l'elettricità resinosa è negativa. In realtà in quest'ultimo caso i due termini elettricità positiva ed elettricità negativa considerati come puri nomi hanno praticamente soppiantato gli altri termini. Si potrebbe dare una serie interninabile di esempi. La nozione dei numeri positivi e negativi è stata, fra le sottigliezze matematiche, quella che ha avuto maggior successo nella pratica.

Capitolo VII

I NUMERI IMMAGINARI

Se le idee matematiche trattate nel precedente capitolo hanno avuto un successo popolare, quelle esposte nel capitolo presente hanno suscitato un'attenzione quasi altrettanto generale. Ma il loro successo è stato di natura diversa; è stato ciò che i francesi chiamano un *succès de scandale*. Non soltanto l'uomo pratico ma persino i dotti ed i filosofi hanno manifestato il loro stupore quando han visto i matematici dedicarsi allo studio di entità misteriose che il nome stesso indica come immaginarie. A questo punto può esser utile osservare come vi sia un certo tipo di intelletto sempre intento a tormentare sé stesso e gli altri con discussioni sull'applicabilità dei termini tecnici. È appropriato chiamare numeri i numeri irrazionali? I numeri positivi e negativi sono veramente numeri? I numeri immaginari sono immaginari? e sono numeri? — Ecco alcuni esempi di simili futili questioni. Ora non si comprenderà mai abbastanza chiaramente che nella scienza i termini tecnici sono nomi assegnati arbitrariamente, come i nomi di battesimo ai bambini. Non vi può essere alcuna questione circa l'esattezza o l' inesattezza di un nome. I nomi possono essere più o meno convenienti, in quanto è possibile fissarli in modo tale che risultino più facili a ricordarsi e suggeriscano idee rilevanti ed importanti. Ma il principio essenziale qui implicito è quello enunciato con la massima chiarezza nel Paese delle Meraviglie da Humpty Dumpty ad Alice, quando egli le

disse a proposito dell'uso che egli faceva delle parole: «Io pago un sovrapprezzo e faccio significare ad esse ciò che mi pare e piace». Perciò noi non staremo a preoccuparci per sapere se i numeri immaginari sono immaginari e per sapere se sono numeri, ma considereremo l'espressione in questione come il nome arbitrario di una certa nozione matematica che ora cercheremo di render chiara.

L'origine del concetto è in tutto simile a quella dei numeri positivi e negativi. Esattamente nello stesso modo essa è dovuta alle tre grandi nozioni matematiche della variabile, della forma algebrica e della generalizzazione. I numeri positivi e negativi sorsero dalla considerazione di equazioni come $x + 1 = 3$, $x + 3 = 1$ e dalla considerazione della forma generale $x + a = b$. Analogamente l'origine dei numeri immaginari è dovuta ad equazioni come $x^2 + 1 = 3$, $x^2 + 3 = 1$ e $x^2 + a = b$. La via seguita è proprio la stessa. L'equazione $x^2 + 1 = 3$ diviene $x^2 = 2$ e quest'ultima ha due soluzioni: $x = +\sqrt{2}$ e $x = -\sqrt{2}$. Per indicare che vi sono queste due diverse soluzioni di solito si scrive $x = \pm\sqrt{2}$. Fin qui tutto procede senza intoppi, come accadeva nel caso precedente. Ma ecco che sorge un'analoga difficoltà. L'equazione $x^2 + 3 = 1$ dà $x^2 = -2$, e non vi è alcun numero positivo o negativo che moltiplicato per sé stesso dia un quadrato negativo. E perciò, se i nostri simboli devono significare numeri positivi o negativi ordinari, non vi è alcuna soluzione della $x^2 = -2$ e questa equazione risulta in effetto priva di senso. Così se da ultimo consideriamo la forma generale $x^2 + a = b$ noi troviamo la coppia di soluzioni $x = \pm\sqrt{b - a}$ se e soltanto se b non è minore di a. Perciò noi non possiamo affermare senza restrizioni che le «costanti» a e b possono essere dei numeri qualsiasi; in altri termini le «costanti» a e b non sono quel che dovrebbero essere e cioè «variabili» indipendenti senza restrizioni, e per ciò man mano che si procede, una grande quantità di limitazioni e di restrizioni verrà ancora ad accumularsi attorno al nostro lavoro.

S' impone quindi lo stesso còmpito di prima: dobbiamo dare ai nostri simboli una nuova interpretazione in modo che le soluzioni $\pm \sqrt{(b-a)}$ dell'equazione $x^2 + a = b$ risultino sempre fornite di senso. In altre parole bisogna che interpretiamo i simboli in modo tale che $\sqrt{a}$ abbia sempre un significato, tanto nel caso che a sia positivo quanto nel caso in cui sia negativo. Naturalmente l' interpretazione dev'essere tale che tutte le solite leggi formali dell'addizione, della sottrazione, della moltiplicazione e della divisione conservino il loro valore; essa inoltre non deve compromettere quella generalizzazione che abbiam guadagnato introducendo i numeri positivi e negativi. Anzi essa deve in un certo senso includere questi ultimi come casi particolari. Quando a è negativo noi possiamo scrivere $-c^2$ in luogo di esso, in guisa che c^2 risulta positivo. Allora:

$$\sqrt{a} = \sqrt{(-c^2)} = \sqrt{\{(-1) \times c^2\}} = \sqrt{(-1)}\,\sqrt{c^2} = c\sqrt{(-1)}.$$

E perciò, se noi riusciamo ad interpretare i nostri simboli in modo che $\sqrt{(-1)}$ abbia un significato, il nostro scopo è raggiunto. È per questo che si è giunti a considerare $\sqrt{(-1)}$ come la chiave di volta di tutte le quantità immaginarie.

Trovare un' interpretazione di $\sqrt{(-1)}$ è un còmpito molto più arduo di quello analogo relativo all' interpretazione di -1. In effetto, mentre il più facile dei due problemi fu risolto quasi d'istinto non appena esso si presentò, nei confronti dell'altro invece persino i più grandi matematici stentarono sulle prime a rendersi conto che vi era un problema e che esso era forse suscettibile di soluzione. Quando si presentavano delle equazioni come $x^2 = -3$, esse venivano senz'altro scartate come prive di senso.

Tuttavia a poco a poco, durante il secolo XVIII ed anche prima si giunse a rendersi conto di quanto sarebbe stato conveniente poter assegnare un' interpretazione a questi simboli privi di senso. Si condussero dei ragionamenti formali con questi simboli muovendo dalla

semplice supposizione che essi obbedissero alle solite leggi algebriche di trasformazione, e si constatò che era possibile guadagnare in questo modo tutta una lunga serie di risultati interessanti, sempreché fosse ammessa la legittimità dell'uso di quei simboli. Molti matematici non avevano allora idee ben chiare circa la logica dei loro procedimenti e così guadagnò terreno l' idea, che, in qualche maniera misteriosa, dei simboli privi di significato possano, attraverso opportune manipolazioni fornire delle dimostrazioni valide di certe proposizioni. Non vi è nulla di più errato, Un simbolo che non sia stato definito in modo appropriato non è affatto un simbolo; non è che una macchia d' inchiostro sulla carta, di forma facilmente riconoscibile. E una serie di macchie non dimostra nulla: o al più potrà dimostrare la cattiva qualità della penna o la trascuraggine dello scrivente. Fu in quell'epoca che si giunse ad applicare a $\sqrt{(-1)}$ l'epiteto di « immaginaria ». Ciò che quei matematici erano veramente riusciti a dimostrare era una serie di proposizioni ipotetiche la forma generica delle quali è la seguente: Se esistono interpretazioni di $\sqrt{(-1)}$ e dell'addizione, della sottrazione, moltiplicazione e divisione di $\sqrt{(-1)}$ tali che con esse risultino soddisfatte le solite leggi algebriche (p. es. $x + y = y + x$, ecc.), allora seguono questi e questi altri risultati. È naturale che i matematici non vedessero molto di buon occhio quel grosso « se » che avrebbe dovuto precedere l'enunciazione dei loro risultati.

Come è facile a prevedersi, l' interpretazione, quando venne scoperta, risultò qualcosa di molto più complesso dell' interpretazione dei numeri negativi, ed occorre richiamare qui l'attenzione del lettore sopra alcune ben precise spiegazioni preliminari. Ci siamo già imbattuti nella rappresentazione di un punto mediante due numeri. Servendoci dei numeri positivi e negativi siamo ora in grado di rappresentare la posizione di un punto qualsiasi di un piano mediante una coppia di tali numeri. Così noi prendiamo la coppia di linee rette perpendicolari XOX′ e YOY′ come sistema di « assi »

dai quali iniziare tutte le nostre misurazioni. Le lunghezze misurate lungo la OX e la OY sono positive, quelle misurate in senso inverso lungo la OX′ e la OY′ sono negative. Si supponga che una coppia di numeri scritti ordinatamente, per esempio (+ 3, + 1) in guisa che vi sia un primo numero (nell'esempio dato + 3) ed un secondo numero (nell'esempio dato + 1) rappresenti delle misure prese a partire da O lungo la XOX′ per il primo numero e lungo la YOY′ per il secondo. Così (cfr. la fig. 9) in corrispondenza di (+ 3, + 1) si

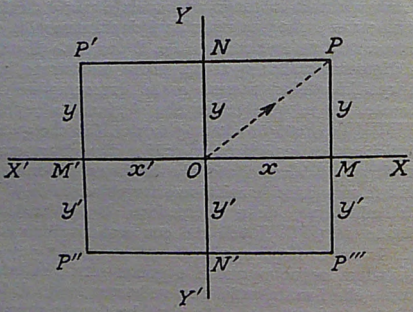

Fig. 8

deve prendere una lunghezza di 3 unità lungo la XOX′ nel senso positivo, vale a dire da O verso X e una lunghezza di 1 unità lungo la YOY′ nel senso positivo, vale a dire da O verso Y. Analogamente in corrispondenza di (— 3, + 1) si deve prendere una lunghezza di tre unità da O verso X′ e una lunghezza di 1 unità da O verso Y. Così pure in corrispondenza di (— 3, — 1) le due lunghezze vanno prese rispettivamente lungo la OX′ e la OY′ e in (+ 3, — 1) rispettivamente lungo la OX e la OY′. Per il momento chiameremo « coppia

ordinata » una siffatta coppia di numeri. Allora i due numeri 1 e 3 dànno origine ad otto coppie ordinate e cioè

(+ 1, + 3), (— 1, + 3), (— 1, — 3), (+ 1, — 3),
(+ 3, + 1), (— 3, + 1), (— 3, — 1), (+ 3, — 1).

Ciascuna di queste « coppie ordinate » indica un procedimento di misurazione lungo la XOX′ e la YOY′ diverso da quello indicato da qualsiasi altra.

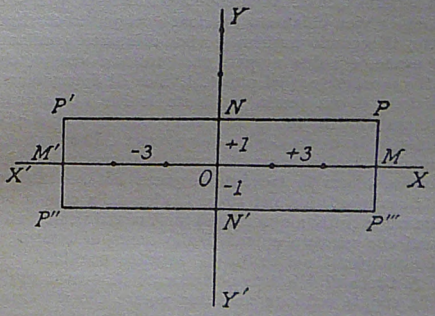

Fig. 9

I procedimenti di misurazione indicati dalle ultime quattro « coppie ordinate » elencate sopra ci appaiono in modo intuitivo nella figura. Le due lunghezze OM ed ON corrispondono a (+ 3, + 1), le due lunghezze OM′ ed ON corrispondono a (— 3, + 1), OM′ ed ON′ a (— 3, —1) e OM ed ON′ a (+ 3, —1). Ma completando i vari rettangoli è facile scorgere che il punto P determina in modo completo la coppia ordinata (+ 3, + 1) ed è completamente determinato da essa, e che il medesimo si può dire del punto P′ rispetto alla coppia (— 3, + 1), del punto P″ rispetto alla (— 3, — 1) e

del punto P''' rispetto alla (+ 3, —1). Più in generale nella figura precedente (8) il punto P corrisponde alla coppia (x, y), supponendosi in tale figura che x ed y siano entrambi positivi, il punto P' corrisponde alla $(x' y)$ supponendosi nella figura che x' sia negativo, P'' alla (x', y') e P''' alla (x, y'). Pertanto una coppia ordinata (x, y) (dove x ed y sono numeri positivi o negativi qualsiasi) ed il punto corrispondente si determinano a vicenda. È opportuno introdurre qui alcuni termini tecnici. Nella coppia ordinata (x, y) il primo numero x vien chiamato « ascissa » del punto corrispondente, il secondo numero y vien chiamato « ordinata » del punto, e i due numeri presi insieme vengon chiamati « coordinate » del punto. L' idea di determinare la posizione di un punto mediante le sue « coordinate » non era affatto nuova in quell'epoca in cui si stava formando la teoria degli « immaginari ». Essa era stata enunciata da Descartes, il grande matematico e filosofo francese e noi la troviamo esposta nel suo *Discours* pubblicato a Leida nel 1637. L' idea della coppia ordinata come entità a sé sorse più tardi ed è il risultato degli sforzi che vennero compiuti allo scopo di interpretare gli immaginari nel modo più astratto possibile.

A titolo di ulteriore chiarimento di questa nozione della coppia ordinata possiamo notare che il punto M nella figura 9 corrisponde alla coppia (+ 3, 0), il punto N corrisponde alla coppia (0, + 1), il punto M' alla coppia (— 3, 0), il punto N' alla coppia (0, — 1) ed il punto O alla coppia (0, 0).

Un altro modo di concepire la coppia ordinata (x, y) consiste nel pensarla come rappresentante la linea tratteggiata OP (cfr. la fig. 8) invece che il punto P. In tal modo la coppia ordinata rappresenta un segmento condotto a partire dall' « origine » O e avente una certa lunghezza ed una certa direzione. Il segmento OP può venir chiamato il vettore condotto da O a P o il passo da O a P. Si vede dunque che in questo capitolo non abbiamo fatto altro che estendere l' interpretazione dei numeri positivi e negativi data precedentemente. Questo me-

todo di rappresentazione mediante vettori risulta molto utile allorché consideriamo il significato da assegnare alle operazioni dell'addizione e della sottrazione delle coppie ordinate.

Affronteremo ora questo problema chiedendoci quale sia il significato che conviene assegnare all'addizione delle due coppie ordinate (x, y) e (x', y'). L'interpretazione dovrà esser tale che: *a*) il risultato dell'operazione sia un'altra coppia ordinata, *b*) l'operazione risultati commutativa in guisa che si abbia: $(x, y) + (x' y') = (x', y') + (x, y)$, *c*) l'operazione risulti associativa in guisa che si abbia:

$$\{(x, y) + (x', y')\} + (u, v) = (x, y) + \{(x', y') + (u, v)\},$$

d) il risultato della sottrazione sia unico cosicché, quando noi vogliamo determinare la coppia ordinata incognita (x, y) in modo che essa soddisfi l'equazione:

$$(x, y) + (a, b) = (c, d)$$

vi sia una e una sola soluzione, che noi possiamo indicare con

$$(x, y) = (c, d) - (a, b).$$

Tutti questi requisiti vengono soddisfatti se si ammette che $(x, y) + (x', y')$ significhi la coppia ordinata $(x + x', y + y')$. E perciò noi poniamo per definizione

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y').$$

Si noti che qui ci siamo attenuti a quell'abitudine matematica di usare lo stesso simbolo $+$ in sensi differenti. Nel primo membro dell'equaglianza il segno $+$ ha quel nuovo significato che noi vogliamo appunto definire, mentre i due $+$ del membro destro significano quell'addizione di numeri positivi o negativi (di operazioni) che è stata definita nel capitolo precedente. Questo duplice uso non dà luogo in pratica ad alcuna confusione.

Quali esempi di addizioni abbiamo:

$$(+3, +1) + (+2, +6) = (+5, +7),$$
$$(+3, -1) + (-2, -6) = (+1, -7),$$
$$(+3, +1) + (-3, -1) = (0, 0).$$

Risulta ora per noi determinato il significato della sottrazione. È possibile scorgere che:

$$(x, y) - (u, v) = (x - u, y - v).$$

Così:

$$(+3, +2) - (+1, +1) = (+2, +1)$$

e

$$(+1, -2) - (+2, -4) = (-1, +2)$$

e

$$(-1, -2) - (+2, +3) = (-3, -5).$$

È facile scorgere che:

$$(x, y) - (u, v) = (x, y) + (-u, -v).$$

Inoltre

$$(x, y) - (x, y) = (0, 0)$$

Onde (0, 0) va considerata come la coppia ordinata zero. Ad esempio:

$$(x, y) + (0, 0) = (x, y).$$

La rappresentazione intuitiva dell'addizione delle coppie ordinate è di una facilità sorprendente.

OP rappresenti la (x, y) in guisa che $OM = x$ e $PM = y$; OQ rappresenti la (x_1, y_1) in guisa che $OM_1 = x_1$ e $QM_1 = y_1$. Si completi il parallelogramma OPRQ con le linee tratteggiate PR e QR; la diagonale OR corrisponderà allora alla coppia ordinata $(x + x_1, y + y_1)$. Infatti, tracciata PS parallela ad OX, i triangoli OQM_1 e PRS risulteranno sotto ogni aspetto uguali.

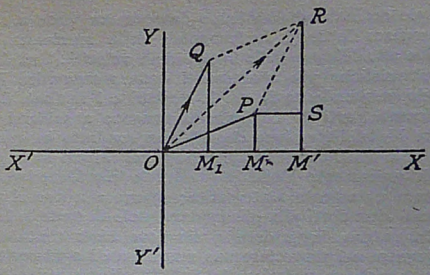

Fig. 10

E allora sarà: $MM' = PS = x_1$ ed $RS = QM_1$ e quindi

$$OM' = OM + MM' = x + x_1$$
$$RM' = SM' + RS = y + y_1.$$

OR rappresenta dunque la coppia ordinata richiesta. La figura si può anche disegnare con OP ed OQ in altri quadranti.

Appare subito evidente che siam tornati alla regola del parallelogramma cui si accennò nel capitolo VI dedicato alle leggi del moto, regola che allora risultò applicabile alle velocità e alle forze. Si ricorderà che se OP ed OQ rappresentano due velocità, allora si dice che un punto si muove con una velocità uguale alla somma delle due precedenti se la sua velocità è OR. In altre parole si dice che OR è la risultante delle due velocità OP ed OQ. Anche le forze agenti sopra un punto si possono rappresentare con dei segmenti, proprio come avviene per le velocità; e anche in tal caso è valida la regola del parallelogramma; e cioè la risultante di due forze OP ed OQ è la forza rappresentata dalla diagonale OR. Ne consegue che noi possiamo considerare una coppia ordinata come rappresentante una velocità od una forza e che in tal caso la regola per l'addizione delle

coppie ordinate che abbiamo dato or ora viene a rappresentare le leggi fondamentali della meccanica relative all'addizione delle forze e delle velocità. Una delle caratteristiche più affascinanti della matematica è il modo sorprendente in cui le nozioni e i risultati delle differenti parti di tale scienza vengono a saldarsi tra loro. Nella discussione che abbiam condotto in questo capitolo e nel capitolo precedente noi siamo stati guidati unicamente dalle più astratte considerazioni di natura puramente matematica; eppure alla fine ci troviamo ricondotti alla più fondamentale di tutte le leggi della natura, legge della quale deve tener conto ogni ingegnere nel progettare una macchina ed ogni costruttore navale nel calcolare la stabilità di una nave. Non è affatto un paradosso dire che nel più teorico dei nostri atteggiamenti noi possiamo trovarci vicinissimi alle nostre applicazioni più pratiche.

Capitolo VIII

I NUMERI IMMAGINARI (*seguito*)

Nella definizione della moltiplicazione delle coppie ordinate ci guidano esattamente le stesse considerazioni indicate a proposito dell'addizione. L' interpretazione della moltiplicazione dev'esser tale che:

α) il risultato sia un'altra coppia ordinata;

β) l'operazione risulti commutativa in modo che si abbia

$$(x,\ y) \times (x'\ y') = (x',\ y') \times (x,\ y);$$

γ) l'operazione risulti associativa in modo che si abbia

$$\}(x, y) \times (x', y')\{ \times (u, v) = (x, y) \times \}(x', y') \times (u, v)\{;$$

δ) il risultato della divisione sia unico, fatta eccezione per il caso delle coppia (o, o) in modo che quando vogliamo determinare la coppia incognita $(x,\ y)$ in guisa tale che sia soddisfatta l'equazione

$$(x,\ y) \times (a,\ b) = (c,\ d)$$

vi sia, per tale problema, una ed una sola soluzione che può essere indicata con:

$$(x,\ y) = (c,\ d) : (a,\ b),$$

oppure con:

$$(x,\ y) = \frac{(c,\ d)}{(a,\ b)}$$

ε) risulti inoltre soddisfatta quella legge che concerne insieme l'addizione e la moltiplicazione e che vien

chiamata legge distributiva, e cioè si abbia:

$$(x, y) \times \{(a, b) + (c, d)\} = \{(x, y) \times (a, b)\} + \{(x, y) \times (c, d)\}.$$

Si possono soddisfare tutte queste condizioni α), β), γ), δ), ed ε) dando alla moltiplicazione un significato che quantunque sembri a prima vista complicato è tuttavia suscettibile di una interpretazione geometrica semplice.

Poniamo per definizione

$$(x, y) \times (x', y') = \{(xx' - yy'), (xy' + x' y)\} \quad \text{(A)}$$

Questa è la definizione del significato attribuito al segno × quando questo si trova scritto fra due coppie ordinate. Da questa definizione consegue in modo evidente che il risultato della moltiplicazione è un'altra coppia ordinata e che il valore del membro destro dell'equaglianza (A) non viene ad essere alterato quando si scambiano tra loro contemporaneamente x con x' ed y con y'. Risultano quindi evidentemente soddisfatte le condizioni α) e β). Dimostrare che risultano soddisfatte anche γ), δ) ed ε) riesce egualmente facile una volta che si sia data l' interpretazione geometrica, il che faremo tra poco. Prima però sarà interessante fermarci un istante per vedere se abbiam raggiunto lo scopo in vista del quale fu iniziata tutta questa elaborazione.

Noi ci imbattemmo in equazioni della forma $x^2 = -3$ alle quali non si poteva assegnare alcuna soluzione mediante numeri reali positivi e negativi. Trovammo poi che tutte le nostre difficoltà sarebbero sparite qualora ci fosse stato possibile dare un' interpretazione dell'equazione $x^2 = -1$, vale a dire qualora avessimo potuto definire $\sqrt{(-1)}$ in modo tale da avere $(\sqrt{(-1)} \times \sqrt{(-1)}) = -1$.

Ora, consideriamo le tre coppie ordinate particolari [1] (0, 0), (1, 0) e (0, 1).

---

[1] D'ora in poi tralasceremo, ogni volta che sia possibile, il segno +; e perciò (1, 0) significherà (+ 1, 0) e (0, 1) (0, + 1).

Abbiamo già dimostrato che

$$(x, y) + (0, 0) = (x, y)$$

Inoltre ora abbiamo

$$(x, y) \times (0, 0) = (0, 0)$$

Quindi sia nell'addizione che nella moltiplicazione la coppia (0, 0) ha la stessa funzione dello zero nell'aritmetica e nell'algebra elementari; si confrontino le eguaglianze precedenti con $x + 0 = x$ ed $x \times 0 = 0$.

Si consideri poi la (1, 0): essa ha la stessa funzione dell' 1 nell'aritmetica e nell'algebra elementari. In queste scienze elementari, infatti, la caratteristica peculiare dell' 1 è che $x \times 1 = x$ per tutti i valori di x. Ora, secondo la nostra legge della moltiplicazione

$$(x, y) \times (1, 0) = \{(x - 0), (y + 0)\} = (x, y)$$

La (1, 0) è quindi la coppia che fa da unità.

E finalmente si consideri la (0, 1): essa ci fornirà l' interpretazione del simbolo $\sqrt{(-1)}$. Il simbolo in questione dovrà dunque possedere la proprietà caratteristica per cui si abbia $\sqrt{(-1)} \times \sqrt{(-1)} = -1$. Ora per la legge della moltiplicazione delle coppie ordinate abbiamo:

$$(0, 1) \times (0, 1) = \{(0 - 1), (0 + 0)\} = (-1, 0).$$

Ma (1, 0) è la coppia unitaria e (— 1, 0) è la coppia unitaria negativa; in guisa che (0, 1) risulta possedere la proprietà desiderata. Vi sono tuttavia due radici di — 1 a cui badare, e cioè $\pm\sqrt{(-1)}$. Si consideri la (0, — 1); anche qui, ricordando che $(-1)^2 = 1$ troviamo $(0, -1) \times (0, -1) = (-1, 0)$.

Dunque (0, — 1) è l'altra radice quadrata di — 1; e pertanto le coppie ordinate (0, 1) e (0, — 1) sono le interpretazioni di $\pm\sqrt{(-1)}$ in termini di coppie ordinate. Ma in quale ordine ha luogo questa corrispondenza? È (0, 1) che corrisponde a $+\sqrt{(-1)}$ mentre (0, — 1) corrisponde a $-\sqrt{(-1)}$, oppure (0, 1) corrisponde a $-\sqrt{(1-)}$ e (0, — 1) a $+\sqrt{(-1)}$? La

risposta è che risulta perfettamente indifferente adottare l'uno o l'altro simbolismo.

Le coppie ordinate si possono dividere in tre tipi:

I) il tipo « immaginario complesso » (x, y) in cui né la x né la y sono uguali a zero;

II) il tipo « reale » $(x, 0)$;

III) il tipo « immaginario puro » $(0, y)$.

Consideriamo le relazioni che han luogo fra questi tre tipi. Anzitutto moltiplichiamo tra loro la coppia « immaginaria complessa » (x, y) e la coppia « reale » $(a, 0)$; troviamo

$$(a, 0) \times (x, y) = (ax. ay)$$

Il risultato si riduce dunque a ciò: che ciascun termine della coppia (x, y) vien moltiplicato per il numero reale positivo o negativo a.

In secondo luogo si moltiplichino tra loro la coppia « complessa » (x, y) e la coppia « immaginaria pura » $(0, b)$; troviamo

$$(0, b) \times (x, y) = (-by, bx).$$

Qui il risultato è più complicato e lo si comprende meglio con l' interpretazione geometrica che esporremo dopo aver notato tre casi ancora più particolari.

In terzo luogo moltiplichiamo la coppia « reale » $(a, 0)$ per la « coppia immaginaria » $(0, b)$ ed otteniamo

$$(a, 0) \times (0, b) = (0, ab)$$

In quarto luogo moltiplichiamo le due coppie « reali » $(a, 0)$ ed $(a', 0)$ tra loro ed otteniamo

$$(a, 0) \times (a', 0) = (aa', 0)$$

In quinto luogo moltiplichiamo le due « coppie immaginarie » $(0, b)$ e $(0, b')$ tra loro ed otteniamo

$$(0, b) \times (0, b') = (-bb', 0)$$

Passiamo ora all' interpretazione geometrica, cominciando anzitutto con alcuni casi particolari. Si prendano le coppie $(1, 3)$ e $(2, 0)$ e si consideri l'equaglianza

$$(2, 0) \times (1, 3) = (2, 6)$$

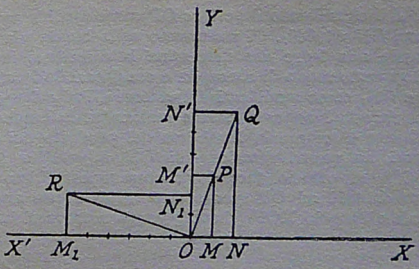

Fig. 11

Nel diagramma (fig. 11) il vettore OP rappresenta la (1, 3), il vettore ON rappresenta la (2, 0) ed il vettore OQ rappresenta la (2, 6). Perciò si trova geometricamente il prodotto (2, 0) × (1, 3) prendendo la lunghezza del vettore OQ in modo che essa sia uguale al prodotto delle lunghezze dei vettori OP e ON e (in questo caso) prolungando OP fino a Q in guisa da ottenere la lunghezza richiesta.

Si consideri ancora il prodotto (0, 2) × (1, 3); abbiamo

$$(0, 2) \times (1, 3) = (-6, 2)$$

Il vettore ON_1 corrisponde a (0, 2) ed il vettore OR a (— 6, 2). In tal modo OR, che rappresenta il nuovo prodotto, viene ad essere perpendicolare al vettore OQ ed ha la stessa lunghezza di questo. Si noti che viene applicata qui la stessa legge che determina la lunghezza di OQ nel caso precedente: e cioè la lunghezza in questione è il prodotto delle lunghezze dei due vettori che vengon moltiplicati; ma ora che abbiamo ON_1 sull'asse OY delle « ordinate » invece di ON sull'asse OX delle « ascisse », la direzione di OP risulta aver subìto una rotazione di 90 gradi.

Finora, negli esempi di moltiplicazione che abbiamo

dati, si è considerato il vettore OP come modificato dai vettori ON ed ON_1. Ci metteremo sulla buona via per giungere alla legge che determina la direzione, invertendo questo modo di concepire e considerando i vettori ON e ON_1 come modificati dal vettore OP. La legge riguardante la lunghezza rimane inalterata: la lunghezza risultante è sempre la lunghezza del prodotto dei due vettori. La nuova direzione di ON ingrandito (cioè di OQ) si ottiene facendo ruotare quest'ultimo nel senso da OX ad OY (senso antiorario) di un angolo eguale all'angolo XOP (che OQ venga a trovarsi in se-

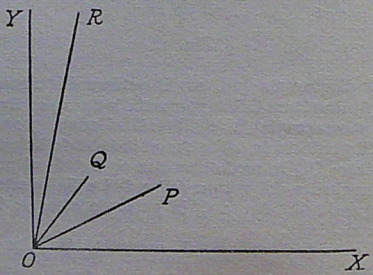

Fig. 12

guito a tale rotazione sul prolungamento di OP è una circostanza accidentale relativa al particolare caso qui considerato). Ancora, si consideri il prodotto di ON_1 ed OP; la nuova direzione di ON_1 ingrandito (cioè di OR) si ottiene facendo ruotare ON_1 nel senso antiorario di un angolo uguale all'angolo XOP; il che significa che l'angolo N_1OR è uguale all'angolo XOP.

La regola generale per la rappresentazione geometrica della moltiplicazione si può ora enunciare nel modo seguente:

Il prodotto dei due vettori OP ed OQ è un vet-

tore OR la cui lunghezza è il prodotto delle lunghezze di OP e di OQ e la cui direzione OR è tale che l'angolo XOR risulta eguale alla somma degli angoli XOP ed XOQ.

Possiamo dunque immaginare che il vettore OP faccia ruotare il vettore OQ di un angolo XOP (cioè dell'angolo QOR uguale all'angolo XOP), oppure che il vettore OQ faccia ruotare il vettore OP di un angolo XOP (cioè dell'angolo POR uguale all'angolo XOQ).

Non diamo la dimostrazione di questa legge generale perché in tal caso ci si dovrebbe addentrare in procedimenti matematici di carattere tecnico in misura maggiore di quanto comporti il piano di questo libro. Ma possiamo ora scorgere immediatamente che risulta soddisfatta la legge associativa della moltiplicazione precedentemente indicata sotto la lettera γ). Si consideri anzitutto la lunghezza del vettore risultante; questa si ottiene col procedimento ordinario per la moltiplicazione dei numeri reali; e quindi vale per essa la legge associativa.

Quanto alla direzione del vettore risultante essa si ottiene con la semplice addizione degli angoli, e quindi la legge associativa vale anche per questo procedimento.

Questo per quanto riguarda la moltiplicazione. Abbiamo così indicato brevemente, riferendoci all'addizione e alla moltiplicazione, come si possa costruire un'algebra od un «calcolo» dei vettori appartenenti ad un piano; un calcolo che ci permette di addizionare, di sottrarre, di moltiplicare fra loro o di dividere uno per l'altro due vettori qualsiasi giacenti nel piano.

Non abbiamo esaminato i dettagli tecnici di tutti questi procedimenti poiché in tal caso saremmo stati condotti troppo addentro nel tecnicismo matematico; abbiamo però indicata in generale la maniera in cui si procede. Quando noi interpretiamo i nostri simboli algebrici nel modo indicato si dice che noi impieghiamo delle «quantità immaginarie» o delle «quantità complesse». L'uso di questi termini non è che una circostanza di dettaglio, e noi abbiamo troppe cose a cui pensare per poter fermarci ad indagare se essi sian stati scelti in modo felice.

Il risultato preciso delle nostre indagini è che ora qualsiasi equazione come ad esempio la $x + 3 = 2$ o la $(x + 3)^2 = -2$ si può sempre interpretare ricorrendo a dei vettori, e può sempre venir risolta. Nella ricerca delle interpretazioni è bene notare che 3 diventa $(3, 0)$, -2 diventa $(-2, 0)$ e x diventa la coppia «incognita» (u, v): di guisa che le due equazioni diventano rispettivamente $(u, v) + (3, 0) = (2, 0)$ e $[(u, v) + (3, 0)]^2 = (-2, 0)$.

Abbiamo così risolte in modo completo quelle difficoltà iniziali che subito ci si presentarono non appena ci mettemmo a considerare i primi elementi dell'algebra. Questa scienza, così come ci appare dopo che la soluzione è stata data, risulta molto più complessa nelle sue nozioni di quanto non fosse all'inizio. In realtà noi abbiamo creato una scienza nuova e del tutto differente, la quale potrà servire a tutti gli scopi per cui fu inventata la scienza vecchia ed a molti altri ancora. Ma prima di congratularci con noi stessi per il risultato delle nostre fatiche dobbiamo bandire un sospetto che a questo punto dovrebbe esser sorto nella mente dello studioso. La domanda che il lettore dovrebbe essersi fatta è la seguente: Quando avrà termine questa necessità di inventare nuove interpretazioni? È vero che siamo riusciti ad interpretare l'algebra in modo da poter sempre risolvere un'equazione di secondo grado come la $x^2 - 2x + 4 = 0$; ma vi è un numero sterminato di altre equazioni: ad esempio la $x^3 - 2x + 4 = 0$, la $x^4 + x^3 + 2 = 0$, e così via senza fine. Ci troviamo forse nella condizione di dover costruire una nuova scienza ogni volta che compare una nuova equazione?

Ebbene, se le cose stessero così, tutte le nostre indagini precedenti, per gradite che possano riuscire a certi intelletti, avrebbero però in realtà una ben scarsa importanza. Ma il grande fatto che ha reso possibile la moderna analisi è che, mediante l'ausilio di questo calcolo vettoriale ogni formula che si presenti può venire interpretata nel suo modo appropriato, in quanto è possibile dimostrare che la quantità «incognita» di

ogni equazione indica qualche vettore. La scienza viene ora a costituire un tutto completo per quanto concerne le sue nozioni fondamentali. Essa ricevette la sua forma definitiva pressapoco in quel tempo in cui si perfezionava la macchina a vapore; ma continuerà ad essere un grande e potente strumento per il dominio del pensiero sulle cose anche quando dei curiosi esemplari di quella macchina riposeranno ormai nei musei in compagnia degli elmi e delle corazze di un'epoca lievemente anteriore.

Capitolo IX

LA GEOMETRIA ANALITICA

I metodi e le nozioni della geometria analitica son già stati usati da noi nei capitoli precedenti. È giunto ora il momento di considerarli più davvicino e per sé stessi; ciò facendo verremo a rafforzare la nostra comprensione di altri concetti già acquisiti. Nel presente capitolo come nei successivi, ritorneremo alla nozione dei numeri reali positivi e negativi, trascurando gli immaginari introdotti negli ultimi due capitoli.

Noi abbiam fatto continuamente uso dell' idea che, prendendo due assi XOX′ ed YOY′ appartenenti ad un piano, si può determinare la posizione di qualsiasi punto di quel piano mediante una coppia di numeri positivi x ed y, dove (cfr. la fig. 13) x è la misura di OM ed y la misura di PM. Per semplice che appaia, questa concezione costituisce l' idea fondamentale di quella grande scienza che è la geometria analitica. La sua scoperta segna l' inizio di un'epoca importante nella storia del pensiero matematico. L' idea in questione è dovuta (come si è già detto) al filosofo Descartes, e si presentò alla mente di lui come un importante metodo matematico una mattina mentre egli se ne stava a letto. Quei filosofi che possedevano una profonda conoscenza della matematica sono stati tra coloro che hanno arricchito questa scienza di alcune tra le sue migliori idee. D'altro canto, bisogna pur dirlo, quasi senza eccezione tutte le osservazioni sulla matematica fatte da quei filosofi che ne possedevano soltanto una conoscenza superficiale o affrettata o acquisita tardi appaiono del tutto prive

di valore essendo o banali o sbagliate. È questo un fatto curioso: sembra infatti che le nozioni ultime della matematica siano, in fondo, molto semplici, di una semplicità quasi puerile, e che rientrino bene nell'ambito del pensiero filosofico. Probabilmente è proprio la loro semplicità che è causa di errore; noi infatti non siamo abituati a pensare a queste entità astratte e semplici; e non appena ci si allontana dalle vie solitamente battute dal pensiero è necessario un lungo addestramento per assicurarsi un' immunità, anche soltanto parziale, dall'errore.

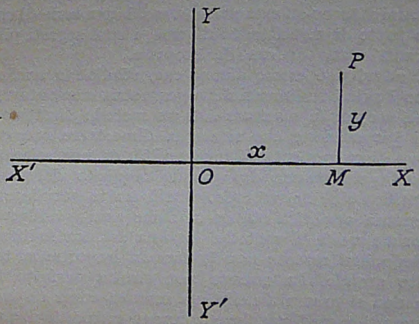

Fig. 13

La scoperta della geometria analitica, come pure la scoperta della geometria proiettiva che ebbe luogo press'a poco nello stesso tempo, illustrano un altro fatto che continuamente si verifica nella storia della conoscenza, e cioè che è sugli argomenti più noti che vi son da fare alcune tra le più grandi scoperte. All' inizio del secolo XVII erano ormai duemila anni che si studiava la geometria, anche se si vuol far cominciare tale scienza soltanto coi greci. Euclide, che insegnò all' Università

di Alessandria, era nato verso il 330 a. C.; ed egli non fece che sistemare ed ampliare l'opera di una lunga serie di predecessori, alcuni dei quali furono uomini di genio. Dopo di lui generazioni di matematici una dopo l'altra lavorarono per l' incremento di quella scienza. Né questa ebbe a soffrire per quell'ostacolo che fatalmente si oppone al progresso: e cioè l'esser coltivata soltanto da un gruppo ristretto di uomini simili tra loro per origine e per vedute — le cose andarono proprio nel modo opposto: quando si giunse al secolo XVII essa era passata attraverso le menti degli egiziani e dei greci, degli arabi e dei tedeschi. Eppure dopo tanto affaticarsi attorno ad essa per una così lunga serie di epoche e da parte di menti tanto diverse, i suoi segreti più importanti erano ancora da scoprire.

Non vi può essere alcuno che, studiando anche soltanto i primi rudimenti della geometria elementare, non abbia sentito la mancanza di un metodo direttivo. Per ogni proposizione che si voglia dimostrare occorre un nuovo dispiegamento di ingegnosità, ed una scienza che richieda ciò manca del grande requisito del pensiero scientifico cioè del metodo. Ora il tratto peculiare della geometria analitica sta in ciò: che essa introdusse per la prima volta il metodo. In una scienza matematica le deduzioni remote non hanno un' importanza teorica molto grande. La scienza non risulta perfetta finché essa non si presenta nella sua essenza come un insieme di grandi metodi tra loro connessi mediante i quali si possono ottenere facilmente conoscenze su qualsiasi argomento desiderato che cada entro l'ambito di quella. Lo sviluppo di una scienza non avviene principalmente nel senso dell'estensione, ma riguarda i concetti; e quanto più i concetti si sviluppano tanto minore diviene il numero delle deduzioni che val la pena di mettere per iscritto. Purtroppo la matematica viene sempre a trovarsi sovraccaricata dal continuo ricorrere, nei libri di testo, di innumerevoli proposizioni la cui importanza è andata perduta, essendo state esse assorbite come casi particolari di verità più generali — poiché, come già

si è sottolineato, la generalità è l'anima della matematica.

La geometria analitica serve poi ad illustrare un altro tratto caratteristico della matematica che già si è messo in rilievo; il fatto cioè che le scienze matematiche, sviluppandosi, vengono a saldarsi tra loro ed a partecipare in comune delle medesime nozioni. Non è esagerato dire che i vari rami della matematica sono soggetti ad un continuo processo di generalizzazione, e che, guadagnando in generalità, essi vengono altresì a fondersi. Anche ciò deriva dalla natura stessa di tale scienza, dalla sua generalità, vale a dire dal fatto che essa tratta delle verità generali che si applicano a tutte le cose per il semplice fatto che esse sono cose. Sotto questo riguardo l' interesse che la geometria analitica presenta risiede nel fatto che essa mette in rapporto, connettendole, la geometria, la quale sorse come scienza dello spazio e l'algebra che ha la sua origine nella scienza del numero.

Richiamiamo qui le nozioni fondamentali di queste due scienze e vediamo in che modo esse vengano messe in rapporto tra di loro col metodo cartesiano delle coordinate. Si consideri anzitutto l'algebra. Non staremo a preoccuparci degli immaginari e ci riferiremo soltanto ai numeri reali con segno positivo o negativo. La nozione fondamentale è quella di numero qualsiasi, di numero variabile denotato da una lettera e non da una cifra determinata. Si passa quindi a considerare le correlazioni tra le variabili. Ad esempio, se x ed y sono due variabili, noi possiamo concepirle come correlate tra loro mediante l'equazione $x + y = 1$, o mediante la $x - y = 1$, o in un numero indefinito di altri modi. Il che ci porta subito ad applicare la nozione della forma algebrica. Noi infatti giungiamo a pensare in modo generale ad una correlazione qualsiasi di un determinato tipo interessante, elevandoci così dal concetto iniziale dei numeri variabili al concetto derivato di correlazioni variabili tra numeri. Così noi generalizziamo la correlazione $x + y = 1$ nella correlazione $ax + by = c$. Qui a, b e c, essendo lettere, denotano numeri qualsiasi

e, in effetto, sono essi stessi delle variabili. Ma si tratta di quelle variabili che determinano la correlazione variabile; e questa, una volta determinata, determina a sua volta la correlazione dei numeri variabili x ed y. Quelle variabili che, come le sopra indicate a, b e c, vengono usate per determinare la correlazione vengon dette «costanti» o parametri. L'uso del termine «costante» che vien fatto qui per indicare ciò che in realtà è una variabile potrà sembrar strano a prima vista; ma in realtà esso è molto naturale. Poiché, l' indagine matematica tende a stabilire quale relazione ha luogo tra x ed y una volta che si suppongono determinate a, b e c. E perciò, in un certo senso, rispetto ad x e ad y le «costanti» a, b e c sono costanti. Così la $ax + by = c$ ci presenta il caso generale di una certa forma algebrica, e cioè di una correlazione variabile appartenente ad una certa classe.

Ancora, noi generalizziamo la $x^2 + y^2 = 1$ nella forma $ax^2 + by^2 = c$ o ulteriormente nella forma $ax^2 + 2hxy + by^2 = c$ o ulteriormente ancora nella forma $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy = c$. Anche qui noi perveniamo a delle correlazioni variabili indicate dalle diverse forme algebriche rispettive.

Veniamo ora alla geometria. Il nome di questa scienza richiama subito alla nostra mente l' idea di figure e disegni con triangoli e rettangoli e quadrati e cerchi aventi tutti particolari rapporti l'uno con l'altro. Lo studio delle proprietà più semplici di queste figure è l'oggetto della geometria elementare così come essa viene giustamente presentata al principiante. Eppure con un attimo di riflessione si può scorgere che non è questo il giusto modo di concepire tale scienza. Può esser giusto che un bambino cominci i suoi ragionamenti geometrici sopra delle figure come triangoli e quadrati da lui ritagliati con le forbici. Ma, in ogni caso, che cos' è un triangolo? È una figura definita e delimitata da tre segmenti appartenenti a tre linee rette.

Ora, questa della delimitazione degli spazi mediante segmenti di linee è una nozione molto complessa; ed

è una nozione che non ci dà assolutamente alcuna speranza di pervenire a quei concetti semplici e generali che dovrebbero formare l'ossatura della scienza in questione. Ci occorre qualche cosa di più semplice e di più generale. Fu questa presenza ossessiva di idee iniziali inappropriate — idee, peraltro, molto naturali ed adatte per la formazione di un primo insieme di vedute sull'argomento — che rese per tanti secoli relativamente sterile lo studio di quella scienza. Alla geometria analitica e all' inventore di essa, Descartes, va riconosciuto il merito di avere svelato i veri oggetti semplici del pensiero geometrico.

Invece di un segmento di linea retta pensiamo tutta una linea retta nella sua lunghezza illimitata in entrambi i sensi. Questo è il tipo di nozione generale dal quale vanno iniziate le nostre indagini geometriche. Sembra che mai i greci abbiano scorto alcunché di utile in questo concetto che è divenuto invece fondamentale in tutto il pensiero geometrico moderno. Euclide prende sempre in considerazione un tratto di linea retta condotto fra due punti determinati e si preoccupa molto di avvertirci quando la retta va prolungata al di là di tale segmento. Egli non pensa mai alla linea come ad una entità data una volta per sempre come un tutto. Questa tendenza a determinare e a delimitare accuratamente in guisa da escludere un' infinità che non appare direttamente ai sensi, fu un tratto caratteristico del genio, greco, in tutte le sue molteplici attività. Essa trova espressione nella differenza tra l'architettura greca e l'architettura gotica, e tra la religione greca e la religione moderna. La guglia di una cattedrale gotica e l' importanza che ha assunto nella geometria moderna la retta infinita sono entrambe simbolo della trasformazione avvenuta nel mondo moderno.

La linea retta considerata come un tutto è dunque l' idea base da cui prende le mosse la geometria moderna. Ma in seguito ci si presentano altre specie di linee e noi giungiamo al concetto di curva completa fornita in tutti i suoi punti di una determinata caratteristica, proprio

nello stesso modo in cui la linea retta si presenta fornita in tutti i suoi punti della caratteristica della rettilinearità. Vi è ad esempio la circonferenza, nella quale ogni punto presenta la caratteristica di trovarsi ad una data distanza dal centro; e vi è ancora l'ellisse, che è una curva ovale di tal natura che la somma delle due distanze di un punto qualsiasi di essa da due punti determinati detti fuochi dell'ellisse, è costante. È evidente che una circonferenza non costituisce che un caso particolare di ellisse, verificantesi quando i due fuochi vengono a coincidere; in tal caso infatti la somma delle due distanze non è altro che il doppio del raggio della circonferenza. Gli antichi conoscevano le proprietà dell'ellisse e della circonferenza e consideravano naturalmente queste figure come dei tutti. Ad esempio Euclide non parte mai da semplici archi (o tratti) di circonferenza che debbano poi venir prolungati. Egli considera sempre descritta l' intera circonferenza. È un peccato che la circonferenza non sia la linea fondamentale in geometria, poiché in tal caso la concezione difettosa che egli ebbe della retta avrebbe potuto avere conseguenze minori.

Questa nozione generale di una curva che in ogni suo punto presenta qualche proprietà uniforme viene indicata in geometria col termine di « luogo geometrico ». Un luogo geometrico è la curva (o la superficie, nel caso che non ci si limiti a considerare un piano) formata dai punti che posseggono tutti una determinata proprietà. Ad ogni proprietà che può caratterizzare la relazione dei punti fra loro corrisponde qualche luogo geometrico, il quale è formato da tutti quei punti che posseggono la proprietà in questione. Nell' investigare le proprietà di un luogo geometrico considerato come un tutto, noi consideriamo un punto o dei punti *qualsiasi* di esso. Così incontriamo di nuovi in geometria la nozione fondamentale della variabile. Inoltre quando noi classifichiamo i luoghi geometrici raggruppandoli nelle varie categorie delle linee rette, delle circonferenze, delle ellissi, ecc., ecco che riappare la nozione della forma.

Perciò, come in algebra noi ci occupiamo di numeri variabili, di correlazioni fra numeri variabili e della classificazione di tali correlazioni a seconda del loro tipo mediante l' idea della forma algebrica, così in geometria ci occupiamo di punti variabili, di punti variabili che soddisfano a certe condizioni in guisa da formare un luogo geometrico, e della classificazione dei luoghi geometrici a seconda del loro tipo mediante l' idea della loro attitudine a soddisfare condizioni della medesima forma.

Ora, l'essenza della geometria analitica consiste nell' identificazione della correlazione algebrica con il luogo geometrico. Un punto di un piano vien rappresentato algebricamente dalle sue due coordinate x ed y e la condizione soddisfatta da qualsiasi punto di un luogo geometrico vien rappresentata dalla corrispondente correlazione fra x ed y. E finalmente, alle correlazioni esprimibili in qualche forma algebrica generale come $ax + by = c$ corrispondono luoghi geometrici di qualche tipo generale, le condizioni geometriche dei quali risultano tutte della stessa forma. Veniamo così a trovarci in condizioni di poter effettuare uno scambio completo di nozioni e di risultati fra le due scienze. Ciascuna delle due scienze getta luce sull' altra e ne guadagna essa stessa immensamente in efficacia. È impossibile non sentirsi scossi quando si pensa alle emozioni che dovettero provare alcuni uomini in certi momenti di avventura e di scoperta — Colombo quando scorse per la prima volta la costa occidentale, Pizarro quando contemplò l' Oceano Pacifico, Franklin allorché vide sprigionarsi la scintilla elettrica dal filo del suo cervo volante, Galileo quando per la prima volta puntò il suo cannocchiale verso il cielo. Momenti simili vengon concessi anche agli studiosi che si muovono nelle regioni astratte del pensiero, ed alto fra essi va annoverato quel mattino in cui Descartes coricato nel suo letto inventò il metodo della geometria analitica.

Una volta afferrata l' idea essenziale della geometria analitica; il primo problema che si presenta alla mente e questo: Quali specie di luoghi geometrici corrispondono

alle forme algebriche note? Ad esempio il più semplice dei tipi generali di forme algebriche è $ax + by = c$. Il tipo di luogo geometrico che corrisponde ad esso è una linea retta, e reciprocamente ad ogni linea retta corrisponde un'equazione di quella forma. È una fortuna che alla più semplice delle forme algebriche debba corrispondere il più semplice dei luoghi geometrici. In realtà è proprio questa corrispondenza fra semplicità geometrica e semplicità algebrica che conferisce all' intera disciplina la sua potente efficacia. Tale corrispondenza deriva dal fatto che la connessione tra geometria ed algebra non è casuale o artificiosa, ma profondamente radicata ed essenziale. L'equazione che corrisponde ad un luogo geometrico viene chiamata equazione «di» (o «relativa a») quel luogo geometrico. Alcuni esempi di equazioni di linee rette serviranno ad illustrare la cosa.

Si consideri la $y - x = o$; qui le lettere a, b e c della forma generale sono state sostituite rispettivamente da -1, 1 e o. La linea avente questa equazione passa per l'origine O del diagramma e biseca l'angolo XOY. È la retta L'OL del diagramma. Che essa passi per l'origine lo si scorge facilmente osservando che l'equazione risulta soddisfatta se si pone simultaneamente $x = o$ e $y = o$; o e o infatti sono le coordinate di O. In realtà è facile generalizzare e vedere nello stesso modo come l'equazione di qualsiasi retta che passi per l'origine è della forma $ax + by = o$. Il luogo geometrico di equazione $y + x = o$ passa anch'esso per l'origine e biseca l'angolo X'OY: esso è la retta $L_1OL'_1$ del diagramma.

Si consideri la $y - x = 1$: il luogo geometrico corrispondente non passa per l'origine. Cerchiamo dunque in quali punti esso intersechi gli assi. Esso deve intersecare l'asse delle x in un punto di coordinate x e o. Ma se nell'equazione poniamo $y = o$ noi otteniamo $x = -1$; perciò le coordinate di questo punto (A) saranno -1 e o. Analogamente il punto (B) nel quale la retta interseca l'asse OY ha per coordinate o e 1. Il luogo geometrico è la retta AB della figura ed essa è parallela alla LOL'. Analogamente $y + x = 1$ è l'equa-

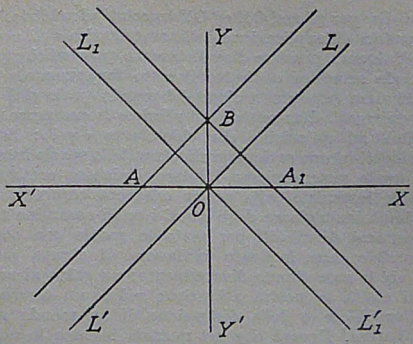

Fig. 14

zione della retta A_1B della figura; e il luogo geometrico è la parallela alla $L_1OL'_1$. È facile dimostrare il teorema generale secondo cui due rette rappresentate dalle equazioni aventi rispettivamente la forma $ax + by = 0$ ed $ax + by = c$ sono parallele.

Il gruppo di luoghi geometrici che incontriamo subito dopo è così importante da meritar un capitolo a sé. Ma prima di passare a questi ci soffermeremo un poco ancora sulle nozioni fondamentali della scienza in questione.

La posizione di qualsiasi punto P si determina scegliendo arbitrariamente un origine O, due assi perpendicolari OX ed OY, e rilevando poi le coordinate x ed y del punto, cioè OM e PM (cfr. la fig. 13). Come abbiam visto nel capitolo precedente, si può determinare P anche per mezzo del « vettore » OP, dove l' idea di vettore implica una determinata direzione oltre che una lunghezza determinata. Da un punto di vista astrattamente matematico l' idea di un'origine arbitraria potrà apparire artificiosa e grossolana, e il medesimo

si può dire per gli assi OX ed OY tracciati ad arbitrio. Ma, riferendoci all'applicazione della matematica agli eventi dell' Universo, possiam dire di trovare qui simboleggiato in modo semplice e diretto il fatto fondamentale che caratterizza la nostra visione del mondo quale ci è fornita dai sensi. Ciascuno di noi riferisce le sue percezioni sensibili ad un'origine che chiamiamo « qui »: l'esser noi situati in una regione particolare dello spazio intorno alla quale raggruppiamo l' intero Universo costituisce il fatto essenziale della nostra esistenza corporea. Noi possiamo immaginare degli esseri i quali osservino tutti i fenomeni distribuiti per tutto lo spazio con occhio imparziale, non inclinato in favore di alcuna parte. Per noi le cose stanno diversamente; un gatto ai nostri piedi attira la nostra attenzione più di un terremoto al Capo Horn o della distruzione di un mondo nella Via Lattea. È vero che nel mettere insieme le nostre conoscenze con quelle dei nostri simili onde formarne un patrimonio comune, noi siam costretti ad abbandonare un po' di quel ristretto egoismo del nostro « qui ». individuale. Noi sostituiamo al « qui » il « press'a poco qui »; e così misuriamo le miglia a partire dal municipio della città più vicina o dalla capitale del paese. Nelle misurazioni terrestri gli scienziati prenderanno come origine il centro della terra; gli astronomi giungeranno ad un grado estremo di altruismo e prenderanno il sole come origine delle loro misure. Ma per lontana che possa essere quest'ultima origine, e per quanto noi possiamo andare anche più in là scegliendo qualche punto opportuno fra le stelle fisse a noi più vicine, in ogni caso, di fronte alle immensurabili infinità dello spazio, resta vero che il nostro modo di procedere nell'esplorazione dell' Universo è sempre quello di prendere come origine un « press'a poco qui ».

La relazione delle coordinate OM ed MP (cioè di x ed y) col vettore OP ci fornisce un'esemplificazione della famosa legge del parallelogramma, come si può scorgere facilmente (cfr. la fig. 8) completando il parallelogramma OMPN. La nozione del « vettore » OP cioè di una gran-

dezza fornita di direzione, è la nozione base della scienza fisica. Qualsiasi corpo in movimento ha una certa quantità di velocità in una certa direzione; il che significa che la sua velocità è una grandezza fornita di direzione, un vettore. Così quando in geometria analitica si introducono le nozioni dell' « origine », delle « coordinate » e dei « vettori » i concetti astratti che noi ci troviamo a studiare corrispondono ai fatti fondamentali del mondo fisico.

Capitolo X

LE SEZIONI CONICHE

Quando i geometri greci ebbero esaurite (così almeno essi pensavano) le proprietà più ovvie delle figure formate da linee rette e da circonferenze, diressero il loro studio ad altre curve; e con il loro istinto quasi infallibile nello scoprire oggetti degni di esame, si occuparono principalmente delle sezioni coniche, cioè delle curve risultanti dalle intersezioni di piani con le superfici di coni circolari. L'uomo cui va riconosciuto il merito di aver iniziato questo studio è Menecmo (nato nel 375 e morto nel 325 a. C.); egli era un discepolo di Platone e fu uno dei precettori di Alessandro Magno. In Alessandro sia detto di sfuggita, abbiamo un esempio cospicuo dei vantaggi di una buona educazione; poiché un altro dei suoi precettori fu il filosofo Aristotele. Abbiam motivo di supporre che Alessandro vedesse in Menecmo un maestro piuttosto noioso, poiché si racconta che egli gli abbia chiesto di render più brevi le sue dimostrazioni. Fu a questa richiesta che Menecmo rispose: «Nel paese ci sono vie private e anche vie regie, ma in geometria c'è soltanto un'unica via per tutti». La risposta, non v'è dubbio, era abbastanza vera, in quel senso in cui poteva venire immediatamente intesa da Alessandro. Ma se Menecmo riteneva che le sue dimostrazioni non potessero venire abbreviate si sbagliava profondamente; e la maggior parte dei matematici moderni si annoierebbe terribilmente se fosse

costretta a studiare le dimostrazioni delle proprietà delle sezioni coniche date dai greci. Non vi è nulla che meglio illustri il guadagno in efficacia che si ottiene con l'introduzione di concetti appropriati, quanto l'osservare il progressivo abbreviarsi delle dimostrazioni a mano a mano che cresce il patrimonio dei concetti. Esiste un certo tipo di matematico che si mostra sempre piuttosto intollerante di ogni indugio sopra i concetti: a lui preme di giungere subito alle dimostrazioni relative ai problemi « importanti ». Ebbene, tutta la storia della scienza è contro di lui. Ci sono vie regie nella scienza; ma coloro che le percorrono per primi sono gli uomini di genio e non i re.

Il modo in cui la sezioni coniche si presentarono originariamente ai matematici fu il seguente: si pensi ad un cono (cfr. la fig. 15) il cui vertice (o punta) sia V, ed avente la base circolare S T U. Il paralume conico di una lampada elettrica ci fornisce spesso un esempio di una superficie siffatta. Ora tutte le rette « generatrici » uscenti da V e giacenti sulla superficie siano prolungate in senso opposto: otteniamo così un doppio cono e P Q R è un'altra sezione trasversale circolare che giace, rispetto a V dalla banda opposta a quella della sezione trasversale STU. L'asse del cono CVC′ passa per tutti i centri di queste circonferenze ed è perpendicolare ai piani di esse, i quali sono paralleli tra loro. Nel disegno le parti delle curve che si suppongono al di là del piano della pagina sono tratteggiate, mentre le parti su tale piano o al di qua di esso sono indicate con linee continue. Si supponga ora che questo doppio cono venga tagliato da un piano non perpendicolare all'asse CVC′, o almeno non necessariamente perpendicolare ad esso. Si dànno allora tre casi:

1) il piano può tagliare il cono secondo una curva ovale chiusa come la ABA′B′ la quale giace completamente sopra uno dei due semi-coni. In questo caso il piano non incontrerà affatto l'altro semi-cono. Una curva siffatta si chiama ellisse; essa è una curva ova-

le. Un caso particolare di tale sezione conica si ha quando il piano è perpendicolare all'asse CVC′; in tal caso la sezione è circolare come la STU o la PQR. Una circonferenza è dunque un caso particolare di ellisse;

2) il piano può essere parallelo ad un piano tangente al cono lungo una delle sue rette « generatrici », come ad esempio il piano della curva $D_1A_1D'_1$ che è parallelo al piano tangente al cono lungo la retta generatrice VS; la curva risulta ancora contenuta in uno dei semi-coni, ma questa volta non si tratta più di una curva ovale chiusa; essa si prolunga all' infinito al prolungarsi delle rette generatrici del semi-cono nel senso opposto al vertice. Una sezione conica siffatta si chiama parabola;

3) il piano può tagliare entrambi i semi-coni in modo tale che la curva complessiva venga a consistere di due parti distinte o, come si suol dire, di due « rami ». Questo caso è illustrato dai due rami $G_2A_2G'_2$ e $L_2A_2L'_2$ che insieme formano la curva. Nessuno dei due rami costituisce una curva chiusa, prolungandosi entrambi all' infinito col prolungarsi dei due semi-coni a partire dal vertice. Questa sezione conica si chiama iperbole.

Vi sono dunque tre tipi di sezioni coniche e cioè l'ellisse, la parabola e l' iperbole. È facile scorgere che, in un certo senso, le parabole costituiscono un caso limite che sta fra l'ellisse e l' iperbole: esse costituiscono una specie più particolare e devon soddisfare a una condizione più particolare. I tre nomi pare sian dovuti ad Apollonio di Perga (nato verso il 260 e morto verso il 200 a. C.) il quale scrisse un trattato sistematico sulle sezioni coniche che rimase fino al secolo XVII l'opera fondamentale in materia.

Si comprenderà subito quanto gravosa e difficile debba essere stata per i geometri greci l' investigazione delle proprietà di queste curve. Si tratta bensì di curve piane, ma lo studio di esse richiede che si disegni in prospettiva una figura solida. Così nel disegno dato qui sotto

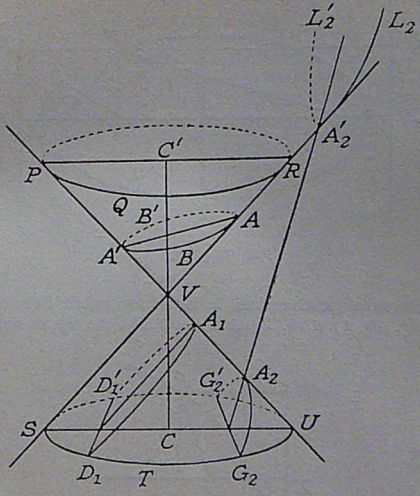

Fig. 15

in pratica non abbiamo tracciato alcuna linea sussidiaria, eppure la figura risulta già abbastanza complessa. Le curve sono curve piane, e sembra ovvio che noi dovremmo poterle definire senza uscire dal piano e ricorrere ad una figura solida. Nello stesso tempo, così come nella definizione «solida» vi è un metodo di definizione uniforme — e cioè mediante la intersezione di un cono con un piano — il quale ci conduce a tre casi distinti, così proprio nello stesso modo anche in qualsiasi definizione «piana» ci dovrebbe essere una maniera di procedere uniforme la quale conduca a tre casi distinti. Dise-

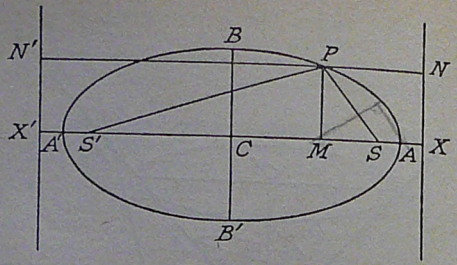

Fig. 16

gnate sui rispettivi piani, le forme son quelle delle curve in fig. 16, 17 e 18. I punti A ed A′ delle figure vengon

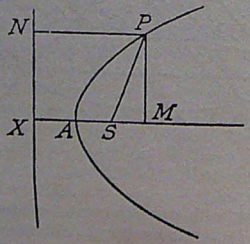

Fig. 17

chiamati «vertici» e la retta AA′ asse maggiore. Si noterà che una parabola (cfr. la fig. 17) ha un solo vertice. Apollonio dimostrò [1] che sia nell'ellisse che nell'iperbole (figg. 16 e 18) il rapporto fra PM^2 e AM:MA′ $\left(\text{cioè } \frac{PM^2}{AM.MA'}\right)$ resta costante, e che nella parabola,

quale appare nella fig. 17, resta costante il rapporto fra PM^2 ed AM; e su questo fatto egli fonda la maggior parte della sua opera. Evidentemente qui ci avviciniamo alla desiderata definizione uniforme che si attenga al piano; non abbiamo però ancora raggiunta del tutto l'uniformità.

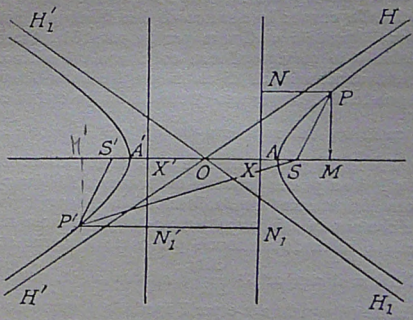

Fig. 18

Nei disegni 16 e 18 si vedranno segnati due punti S ed S', mentre nel disegno 17 se ne vedrà segnato uno solo, S. Si tratta dei fuochi delle curve, i quali sono punti della massima importanza. Apollonio sapeva che nell'ellisse, al variare della posizione di P lungo la curva, la somma di SP ed S'P (cioè SP + S'P) rimane costante ed eguale ad AA'. Analogamente nell' iperbole quando P si trova sopra uno dei due rami resta costante ed uguale ad AA' la differenza S'P – SP, e quando P' si trova sopra l'altro ramo, resta costante ed uguale ad AA' la differenza SP' – S'P'. Non sembrava invece che si potesse

---

1 Per queste notizie su Apollonio e Pappo cfr. Ball, loc. cit.

stabilire qualche cosa di analogo per un punto sulla parabola.

Finalmente, cinquecento anni più tardi, l'ultimo grande geometra greco, Pappo di Alessandria, scoprì l'ultimo segreto che veniva a completare questo ordine di pensieri. Si osserveranno le due rette XN e X′N′ nei disegni 16 e 18 e l'unica retta XN nel disegno 17. Sono le direttrici delle curve: in numero di due tanto per l'ellisse che per l' iperbole e di una per la parabola. Ciascuna direttrice è in corrispondenza col fuoco più vicino. La proprietà caratteristica di un fuoco S e della direttrice corrispondente XN per uno qualsiasi dei tre tipi di curve è la costanza del rapporto fra SP e PN $\left(\text{cioè } \frac{SP}{PN}\right)$, dove PN è la perpendicolare alla direttrice condotta da P e P è un punto qualsiasi della curva. Abbiamo così trovato finalmente quella desiderata proprietà delle curve che non ci obbliga ad uscire dal piano e che risulta enunciata in modo uniforme per tutte le curve stesse. Per l'ellisse il rapporto [1] $\frac{SP}{PN}$ è minore di 1, per la parabola esso è uguale a 1 e per l' iperbole è maggiore di 1.

Quando Pappo ebbe condotte a termine le sue ricerche dovette avere l' impressione che, a prescindere da sviluppi d' importanza secondaria, l'argomento fosse

---

[1] Questo rapporto fondamentale $\frac{SP}{PN}$ vien chiamato l'eccentricità della curva. La forma della curva, in quanto distinta dalla scala ossia dalle dimensioni di quella, dipende dal valore dell'eccentricità. È quindi errato pensare alle ellissi in generale o alle iperboli in generale come se avessero nell'uno o nell'altro caso un'unica forma determinata. Ellissi con eccentricità differenti hanno forme differenti, mentre le loro dimensioni dipendono dalla lunghezza dei rispettivi assi maggiori. Un'ellisse con piccola eccentricità si avvicina molto ad una circonferenza mentre un'ellisse con eccentricità solo di poco minore dell'unità è un lungo ovale molto schiacciato. Le parabole han tutte la medesima eccentricità e quindi la medesima forma, benché possano venir tracciate in scale diverse.

praticamente esaurito; e, qualora egli avesse potuto prevederne il corso, la storia della scienza nell'epoca successiva e per più di un millennio avrebbe confermato la sua persuasione. Eppure le idee veramente efficaci relative a questo ramo della matematica non eran state ancora neppure sfiorate, né si poteva immaginare l'importanza suprema che avrebbe avuto l'applicazione di tali idee allo studio della natura. Il più efficace monito a coloro che vorrebbero limitare le conoscenze e le ricerche a ciò che presenta un'evidente utilità scaturisce dalla riflessione su questo fatto: che per mille e ottocento anni le sezioni coniche furono studiate unicamente come oggetto di una scienza astratta senza che alcuno le ritenesse utili ad altro che a soddisfare la brama di conoscenza dei matematici, e che poi, alla fine di questo lungo periodo di studio astratto, si scoperse che esse costituivano la chiave necessaria per giungere alla conoscenza di una delle più importanti leggi della natura.

Nel frattempo l'astronomia, una scienza completamente distinta dalla precedente, aveva continuato a progredire. Il grande astronomo greco Tolomeo (morto nel 168 d. C.) divulgò nella scuola di Alessandria il suo fondamentale trattato sull'argomento, nel quale egli spiegava i moti apparenti delle stelle fisse, del sole e dei pianeti, ammettendo che la terra fosse immobile e che il sole ed i pianeti ruotassero intorno ad essa. Durante i successivi milletrecento anni andarono aumentando il numero e l'esattezza delle osservazioni astronomiche e in conseguenza di ciò si fu costretti a rendere sempre più complicata la descrizione del moto dei pianeti secondo l'ipotesi di Tolomeo. Copernico (nato nel 1473 e morto nel 1543) dimostrò che era possibile spiegare in modo più semplice i movimenti di questi corpi celesti se si ammetteva che il sole fosse immobile e che la terra ed i pianeti si muovessero intorno ad esso. Egli però riteneva ancora che questi moti fossero in sostanza circolari, anche se alterati da una serie di piccole correzioni che venivano a sovrapporsi in modo arbitrario ai moti circolari principali. Così stavano le cose nel 1571

allorché a Stoccarda, in Germania, nacque Keplero. Venivano ad esserci cioè due scienze: la geometria delle coniche e l'astronomia, ed entrambe eran state coltivate fin dai tempi più antichi senza che si sospettasse l'esistenza di un qualsiasi legame fra di esse. Keplero era un astronomo; ma era altresì un valente geometra e per le idee cui era giunto sull'argomento delle sezioni coniche egli si trovava in anticipo sul suo tempo. La sua figura ci fornisce uno dei tanti esempi di quanto sia falsa l'idea che per riuscire nella ricerca scientifica sia necessario concentrarsi in modo esclusivo sopra un unico e ristretto campo di studio. Le idee nuove è più facile scaturiscano da un insolito accostamento di conoscenze (non è proprio necessario che si tratti di conoscenze vaste; ciò che occorre è una conoscenza profonda di metodi e di concetti appartenenti a campi distinti del pensiero). Si ricorderà che Carlo Darwin giunse a concepire la sua legge dell'evoluzione, influenzato dalla lettura del famoso *Saggio sulla Popolazione* del Malthus; un'opera che trattava un argomento estraneo — così almeno si pensava allora.

Keplero enunciò tre leggi riguardanti il moto dei pianeti; le prime due nel 1609 e dieci anni dopo la terza. Esse sono le seguenti:

1) le orbite dei pianeti sono ellissi delle quali il sole occupa uno dei fuochi;

2) al muoversi di un pianeta lungo la sua orbita, il raggio vettore congiungente il sole col pianeta descrive aree uguali in tempi uguali;

3) i quadrati dei tempi di rivoluzione dei vari pianeti sono proporzionali ai cubi dei rispettivi assi maggiori.

Queste leggi si rivelarono come una semplice tappa verso uno sviluppo di idee ancor più importante. Newton (nato nel 1642 e morto nel 1727) giunse a concepire l'idea della gravitazione universale, e cioè l'idea che due pezzi qualsiasi di materia si attraggono a vicenda con una forza direttamente proporzionale al prodotto delle loro masse ed inversamente proporzionale al quadrato

della loro distanza. Questa legge di vastissima portata, unita ai tre principi della dinamica che furon posti da Newton nella loro forma definitiva e generale, si rivelò atta a spiegare tutti i fenomeni astronomici, comprese le leggi di Keplero, ed è divenuta la base della fisica moderna. Newton dimostrò fra l'altro che le comete potevano muoversi secondo ellissi molto allungate o secondo parabole o secondo iperboli molto simili a parabole. Le comete che ritornano periodicamente (come la cometa di Halley) si muovono naturalmente secondo ellissi. Ma la tappa essenziale che si dovette percorrere per giungere a dimostrare la legge della gravitazione, o anche solo per giungere ad una prima intuizione di tale legge, fu costituita dalla verifica delle leggi di Keplero, leggi che mettevano in rapporto i movimenti dei pianeti con la teoria delle sezioni coniche.

Dal secolo XVII in poi la teoria astratta di queste curve poté giovarsi del duplice incremento che fu dato alle cognizioni geometriche con l'introduzione della geometria analitica e della geometria proiettiva. Le nozioni fondamentali della geometria proiettiva gravitano attorno alla considerazione di gruppi (i cosiddetti « fasci ») di rette passanti per un punto comune (il vertice del « fascio »). Ora (cfr. la fig. 19) se A, B, C, D sono quattro punti fissi qualsiasi di una sezione conica e P è un punto variabile sulla medesima curva, il fascio di segmenti PA, PB, PC e PD gode di una speciale proprietà, nota come la costanza del suo birapporto. Qui basterà dire che la nozione di birapporto è in geometria proiettiva una nozione fondamentale. Nella geometria proiettiva essa fornisce proprio la definizione delle curve o qualche proprietà analoga che in realtà equivale ad una definizione. Si noterà quanto ci si sia allontanati, dopo secoli di studio, dalla vecchia nozione originaria delle sezioni di un cono circolare. Oggi noi siamo in grado di scorgere che ciò di cui i greci eran giunti ad impadronirsi non era che una proprietà secondaria di quelle curve, una proprietà d'importanza relativamente scarsa; benché per qualche divina buona

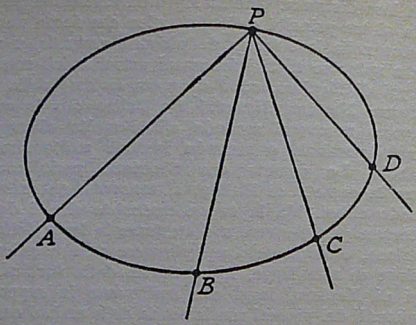

Fig. 19

sorte le curve stesse meritassero tutta l'attenzione che venne loro dedicata. Questa scarsa importanza del concetto di « sezione » trova oggi riscontro nel fatto che nella terminologia matematica corrente si tralascia quella parola nel designare gli oggetti in questione. Oggi infatti si parla indifferentemente di « coniche » invece che di « sezioni coniche ».

E finalmente noi torniamo al punto in cui avevamo lasciato la geometria analitica nel capitolo precedente. Noi ci eravamo chiesti quale fosse la specie di luoghi geometrici corrispondenti alla forma algebrica generale $ax + by = c$ ed avevamo visto che essi eran la classe delle rette del piano. Si era visto che ogni retta ha una equazione di quella forma e che ogni equazione di quella forma corrisponde ad una retta. Vogliamo ora passare al successivo tipo generale di forme algebriche. Questo lo si ottiene evidentemente introducendo termini che contengono x^2, xy e y^2. Perciò la nuova forma generale dovrà scriversi:

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

Che cosa rappresenta tale forma? La risposta è che (qualora rappresenti un luogo geometrico) essa rappresenta sempre una sezione conica e che inoltre le equazioni di tutte le sezioni coniche possono sempre venir poste in quella forma. Distinguere mediante questa forma di equazione le particolari specie di coniche sopra indicate è molto facile. La distinzione dipende dalla considerazione di $ab - h^2$, dove a, b e h sono le costanti che figurano sopra. Se $ab - h^2$ è un numero positivo, la curva è un' ellisse; se $ab - h^2 = 0$ la curva è una parabola; e se $ab - h^2$ è un numero negativo la curva è un' iperbole.

Ad esempio, si ponga $a = b = 1$, $h = g = f = 0$, $c = -4$. Otteniamo allora l'equazione $x^2 + y^2 - 4 = 0$. È facile dimostrare che questa è l'equazione di una circonferenza con centro nell'origine e di raggio 2. Ora $ab - h^2$ diviene $1 \times 1 - 0^2$, cioè 1 ed è pertanto positivo. Quindi la circonferenza risulta un caso particolare di ellisse, come appunto dev'essere. Generalizzando l'equazione di una circonferenza qualsiasi può venir posta nella forma $a(x^2 + y^2) + 2gx + 2fy + c = 0$. Onde $ab - h^2$ diventa $a^2 - 0$, cioè a^2, che è necessariamente positivo. Tutte le circonferenze dunque soddisfano le condizioni cui devono soddisfare le ellissi. La forma generale dell'equazione di una parabola è:

$$(dx + ey)^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

in guisa che i suoi termini cosiddetti di secondo grado si posson scrivere nella forma di un quadrato perfetto. Infatti eseguendo l'elevamento a quadrato si ottiene

$$d^2x^2 + 2dexy + e^2y^2 + 2gx + 2fy + c;$$

in modo che confrontando risulta $a = d^2$, $h = de$, $b = e^2$ e quindi $ab - h^2 = d^2e^2 - (de)^2 = 0$. Perciò la condizione necessaria risulta automaticamente soddisfatta. L'equazione $2xy - 4 = 0$, nella quale $a = b = g = f = 0$, $h = 1$, $c = -4$ rappresenta un' iperbole. Infatti $ab - h^2$ diviene $0 - 1^2$, cioè -1 che è negativo.

La restrizione che si è introdotta quando si è detto che *qualora l'equazione rappresenti un luogo geometrico,*

essa rappresenta una sezione conica, è necessaria, perché alcuni casi particolari dell'equazione generale non rappresentano alcun luogo geometrico reale. Ad esempio non esistono valori reali della x e della y che possano soddisfare la $x^2 + y^2 + 1 = 0$. Si suol dire in tal caso che il luogo geometrico è formato da punti immaginari. Ma questa nozione dei punti immaginari in geometria è una nozione davvero molto complessa e nella quale non intendiamo ora addentrarci.

Nella forma generale dell'equazione sono compresi alcuni casi eccezionali che non si possono riconoscere immediatamente come sezioni coniche. Scegliendo in modo opportuno le costanti si può far sì che l'equazione venga a rappresentare due linee rette. Ora due linee rette intersecantesi si può ben dire rientrino nel concetto greco di sezione conica. Infatti, riferendoci all' immagine del doppio cono data sopra, si scorgerà che alcuni piani passanti per il vertice V dovranno tagliare il cono secondo una coppia di linee rette intersecantesi in V. Si può giungere ad includere anche il caso di due linee rette parallele, qualora si consideri il cilindro circolare come un caso particolare del cono. In tal caso un piano che lo tagli e che sia parallelo al suo asse dovrà tagliarlo secondo linee rette parallele. Comunque, fossero o no gli antichi greci disposti ad ammettere che si possan chiamare sezioni coniche tali casi particolari, questi in ogni caso si trovan certamente compresi fra le curve rappresentate dalla forma algebrica generale di secondo grado. È questo un fatto degno di nota, poiché è caratteristico della matematica moderna includere nelle forme generali ogni sorta di casi particolari che in epoche anteriori sarebbero stati trattati separatamente. Ciò è dovuto al fatto che tale scienza tende alla generalità.

Capitolo XI

LE FUNZIONI

L'uso matematico del termine funzione è entrato anche nella vita comune. Quando si dice ad esempio che « L'umore del tale è in funzione della sua digestione », si usa il termine proprio nel suo senso matematico. Esso significa che è possibile stabilire una regola la quale ci permette di determinare quale sarà l'umore del tale una volta che ci sia noto come procede la sua digestione. Il concetto di « funzione » è dunque abbastanza semplice; e a noi occorre soltanto esaminare come esso venga applicato in matematica ai numeri variabili. Consideriamo dapprima alcuni esempi concreti: Se un treno viaggia alla velocità di venti miglia orarie, la distanza (s miglia) percorsa in un numero qualsiasi di ore, poniamo t, è data da $s = 20 \times t$; ed s vien detto funzione di t. Inoltre $20 \times t$ è la funzione di t con cui s si identifica. Se Giovanni è maggiore di un anno rispetto a Tommaso, allora, quando Tommaso ha un'età qualsiasi di x anni, l'età di Giovanni (y anni) è data da $y = x + 1$; ed y è una funzione di x, e cioè la funzione $x + 1$.

In questi esempi la t e la x vengono dette « argomenti » delle funzioni in cui compaiono. Così t è l'argomento della funzione $20 \times t$ ed x è l'argomento della funzione $x + 1$. Se $s = 20 \times t$ e $y = x + 1$, allora s ed y vengono dette i « valori » delle funzioni $20 \times t$ e $x + 1$ rispettivamente.

Passando ora al caso generale, possiamo definire una funzione matematica come una correlazione fra due

numeri variabili (detti rispettivamente l'argomento ed il valore della funzione) tale che qualunque valore venga assegnato all'« argomento della funzione » il « valore della funzione » risulti determinato univocamente (cioè in modo unico). Non è necessariamente vero l' inverso, e cioè che una volta determinato il valore della funzione, risulti pure determinato in modo unico l'argomento. Altre funzioni di argomento x sono:

$$y = x^2, \quad y = 2x^2 + 3x + 1, \quad y = x, \quad y = log x, \quad y = sen x.$$

Le ultime due funzioni di questo gruppo saranno facilmente riconosciute da coloro che possiedono qualche nozione di algebra e di trigonometria. È inutile che ci fermiamo qui a spiegarle, dal momento che le abbiamo introdotte unicamente a guisa di esempi.

Fin qui, pur avendo data una definizione di ciò che intendiamo per funzione in generale, noi ci siamo limitati a menzionare un gruppo di funzioni particolari. Ma la matematica, fedele al suo modo di procedere generale, simbolizza la nozione generale di funzione qualsiasi. Essa fa ciò scrivendo $F(x)$, $f(x)$, $g(x)$, $\varphi(x)$, ecc. per indicare una funzione qualsiasi di x, dove l'argomento x è posto fra parentesi, mentre vengono anteposte alcune lettere come F, f, g, φ, ecc. ad indicare la funzione. Questa notazione ha i suoi difetti: ad esempio si trova in contrasto con la convenzione secondo cui le lettere isolate debbono rappresentare numeri variabili; infatti qui F, f, g, φ, ecc. stanno ad indicare delle funzioni variabili. Sarebbe facile presentare degli esempi nei quali basta affidarsi al buon senso ed al contesto per scorgere qual' è il significato della scrittura. Un modo di evitare la confusione consiste nell'usare lettere greche (per esempio la φ come si è fatto qui sopra); un altro modo consiste nel limitarsi ad usare f od F (iniziale della parola funzione) come lettera funzionale e nel prendere, qualora sia necessario simbolizzare altre funzioni variabili, una lettera vicina come la g.

Con questi chiarimenti e con queste precauzioni noi possiamo scrivere $y = f(x)$ per indicare che y è il valore

di una qualche funzione imprecisata di argomento x; dove $f(x)$ può stare in luogo di qualsiasi espressione come $x + 1$, $x^2 - 2x + 1$, $senx$, $logx$ od anche soltanto della x stessa. Il punto essenziale è che una volta dato x, allora y risulta in conseguenza di ciò determinato in maniera univoca. È importante avere idee ben chiare sul carattere generale di questa nozione. Ad esempio in $y = f(x)$noi, se vogliamo, possiamo definire la $f(x)$ in modo che essa significhi che quando x è un intero $f(x)$ è zero e quando x ha un qualsiasi altro valore $f(x)$ è uguale a 1. Allora ponendo $y = f(x)$ con questa convenzione circa il significato di f, y risulta 0 o 1 a seconda che il valore di x è intero o non lo è. Così sarà $f(1) = 0$, $f(2) = 0$, $f\left(\frac{2}{3}\right) = 1$, $f(\sqrt{2}) = 1$ e così via.

Questa scelta circa il significato da assegnare a $f(x)$ ci dà una funzione di argomento x alla quale si applica perfettamente la definizione generale di funzione.

Dopo tutto una funzione non è altro che una specie di correlazione fra due variabili e può quindi venir rappresentata al pari delle altre correlazioni mediante un grafico e cioè, in effetto, coi metodi della geometria analitica. Ad esempio la fig. 2 del Capitolo II è il grafico della funzione $\frac{1}{v}$ dove v è l'argomento e p il valore della funzione. In questo caso il grafico è tracciato soltanto per i valori positivi di v, i soli che abbiano un significato nell'applicazione fisica considerata in quel capitolo. Così pure nella fig. 14 del Capitolo IX l' intera retta AB illimitata in entrambi i sensi è il grafico della funzione $x + 1$, essendo x l'argomento e y il valore della funzione; e nella medesima figura la retta illimitata A_1B è il grafico della funzione $1 - x$, e la retta LOL′ il grafico della funzione x, essendo x l'argomento ed y il valore della funzione.

Queste funzioni espresse da formule algebriche semplici si prestano ad una rappresentazione mediante grafici. Ma per alcune funzioni questo tipo di rappresenta-

zione potrebbe esser causa di errore qualora non venisse accompagnato da una dettagliata spiegazione, o potrebbe anche essere addirittura impossibile. Si consideri ad esempio la funzione sopra menzionata, la quale ha il valore 1 per tutti i valori dell'argomento x eccetto gli interi (come ad esempio per $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, ecc.) nel quale ultimo caso essa ha il valore 0. In un grafico il suo aspetto sarebbe quello di una linea retta ABA′ condotta parallelamente all'asse XOX′ alla distanza di 1 unità di lunghezza da esso. Ma vanno omessi i punti B, C_1, C_2, C_3, C_4, ecc. corrispondenti ai valori 0, 1, 2, 3, 4, ecc. dell'argomento x, e in luogo di essi si devono prendere i punti O, B_1, B_2, B_3, B_4, ecc. sull'asse

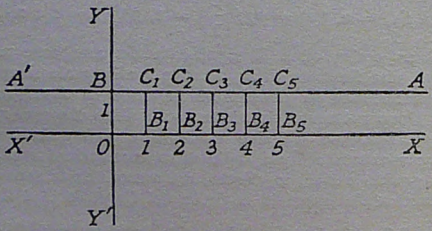

Fig. 20

OX. È facile trovare delle funzioni per le quali la rappresentazione grafica è non soltanto difficoltosa ma addirittura impossibile. Nella matematica superiore vi sono funzioni importanti che non si prestano ad una rappresentazione mediante grafici, ma non occorre che qui noi stiamo ad occuparci di esse.

La più importante suddivisione delle funzioni riguarda le funzioni continue e le discontinue. Una funzione è continua quando per variazioni graduali dell'argomento il suo valore varia solo gradualmente; ed è discontinua quando il suo valore può variare per salti improvvisi. Così le due funzioni $x + 1$ e $1 - x$ i cui gra-

fici così come appaiono nella fig. 14 del Capitolo IX sono delle linee rette, sono funzioni continue; e così pure la funzione $\frac{1}{v}$ rappresentata nel Capitolo II risulta continua finché si considerano soltanto i valori positivi di v. Ma la funzione rappresentata nella fig. 20 di questo capitolo è discontinua, poiché per i valori $x = 1$, $x = 2$, ecc. dell'argomento il suo valore fa dei salti improvvisi.

Consideriamo alcuni esempi di funzioni che ci si presentano in natura, in modo da farci un' idea della effettiva portata dei concetti di continuità e discontinuità. Si consideri un treno in corsa lungo una linea ferroviaria a partire, poniamo da Euston, il capolinea londinese della vecchia London and North-Western Railway. Lungo la linea si trovano nell'ordine le stazioni di Bletchley e di Rugby. Sia t il numero di ore da che il treno è in viaggio a partire da Euston, ed s il numero delle miglia percorse. Allora s è una funzione di t, e cioè il valore variabile corrispondente all'argomento variabile t. Se ci son note le circostanze della corsa del treno, noi siamo in grado di determinare s non appena ci è dato un valore particolare di t. Ora, prescindendo da casi miracolosi, noi possiamo tranquillamente supporre che s sia una funzione continua di t È impossibile ammettere che da Euston a Bletchley, si possa seguire in modo continuo la corsa del treno e che poi questo faccia la sua comparsa a Rugby senza che passi alcun intervallo di tempo sia pur piccolo. La supposizione è troppo fantastica per poter entrare nei nostri calcoli: essa contempla delle possibilità con le quali non ci si imbatte che nelle *Mille e una notte*; e del resto persino quando si leggono queste favole è difficile che si riesca ad immaginare la pura discontinuità del moto; esse non osano imporre alla nostra credulità niente più dell' idea di una velocità veramente straordinaria. Ma una velocità straordinaria non è in contrasto con la grande legge della continuità del moto la quale sembra vigere in natura. Così la luce sembra si muova con la velocità di circa 190·000 miglia al secondo,

e giunge dal sole a noi in sette od otto minuti; ma nonostante questa velocità la distanza che la luce percorre è sempre una funzione continua del tempo.

Che anche la velocità di un corpo sia sempre una funzione continua del tempo non è proprio altrettanto evidente per noi. Si consideri il treno in un istante qualsiasi t: esso si muove ad una velocità determinata, poniamo di v miglia orarie, dove v è zero quando il treno è fermo in una stazione ed è negativa quando il treno retrocede. Ora noi siamo pronti ad ammettere che y non può mutare improvvisamente il suo valore, trattandosi di un treno massiccio e pesante. È certo che il treno non può correre a quaranta miglia orarie dalle 11 e 45 fino a mezzogiorno per poi mettersi a correre, improvvisamente e senza che trascorra alcun intervallo di tempo, a 50 miglia orarie. Noi riconosciamo subito che il mutamento di velocità dovrà essere un processo graduale. Ma che diremo degli urti improvvisi di sufficiente intensità? Supponiamo che due treni si scontrino; o, per prendere un esempio più modesto, supponiamo che un uomo calci un pallone. Certamente, da quanto appare ai nostri sensi, si direbbe che il pallone abbia cominciato a muoversi all' improvviso. E perciò quando si tratta della velocità i nostri sensi non si ribellano all' idea che essa sia una funzione discontinua del tempo, mentre si ribellavano all' idea di uno spostamento istantaneo del treno da Bletchley a Rugby. Di fatto però, se le leggi della dinamica con il concetto della massa in esse implicito sono vere, non esiste in natura qualcosa come una velocità discontinua. Tutto ciò che si presenta ai nostri sensi come un cangiamento discontinuo di velocità, va considerato, in base a tali leggi, come un caso di cangiamento graduale ma troppo rapido per la nostra percezione. Sarebbe tuttavia arrischiato metterci subito a generalizzare affermando che in natura non si presentano funzioni discontinue. Un uomo il quale, persuaso che l'altitudine media sul livello del mare nella regione compresa fra Londra e Parigi sia una funzione continua della distanza da Londra, passeggiasse

di notte sullo Shakespeare's Cliff presso Dover contemplando la Via Lattea, morirebbe prima di aver avuto il tempo di riassestare le sue idee in modo da tener conto della necessità di andar cauti nel trarre conclusioni scientifiche.

È molto facile trovare una funzione discontinua anche limitandosi alle formule algebriche più semplici. Si

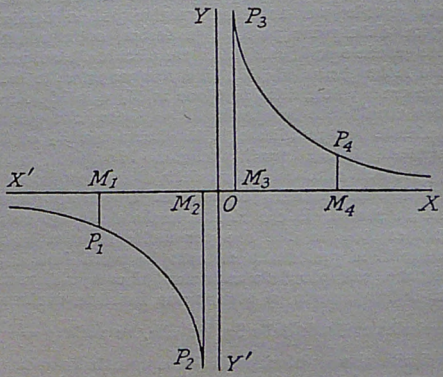

Fig. 21

prenda ad esempio la funzione $y = \frac{1}{x}$ che noi abbiamo già considerata nella forma $p = \frac{1}{v}$, dove v era limitata a valori positivi. Ora però ammettiamo che x possa assumere qualsiasi valore positivo o negativo. Il grafico della funzione si trova nella fig. 21. Si supponga che x varii in modo continuo da un valore negativo molto grande fino a o per una serie di valori negativi numericamente decrescenti, e poi per la serie dei valori positivi

crescenti. Allora se la x è rappresentata da un punto mobile M sulla XOX′, questo punto M parte dall'estrema sinistra dell'asse XOX′ e si muove passando successivamente per M_1, M_2, M_3, M_4, ecc. I punti corrispondenti della funzione sono P_1, P_2, P_3, P_4, ecc. È facile scorgere che vi è un punto di discontinuità per $x = 0$, cioè all'origine O. Infatti il valore della funzione dalla parte negativa (a sinistra) rispetto all'origine diviene infinitamente grande ma negativo, mentre poi la funzione riappare dalla parte positiva (a destra) come infinitamente grande e positiva. Quindi per piccola che noi prendiamo la lunghezza M_2, M_3, vi è sempre un salto localizzato tra i valori della funzione in M_2 e in M_3. Anzi, il caso considerato ha questo di peculiare: che quanto più piccola noi prendiamo la lunghezza tra M_2 ed M_3 (sempreché questi punti includano l'origine), tanto maggiore è il salto del valore della funzione quando si passa dall'uno all'altro di tali punti. Questo grafico mette in risalto ciò che risulta anche dalla fig. 20 di questo capitolo, e cioè che per molte funzioni le discontinuità si presentano soltanto in punti isolati, di guisa, che, ponendo delle restrizioni al campo di variabilità dell'argomento, si ottiene una funzione continua.

Così risulta evidente dalla fig. 21 che, se nella $y = \frac{1}{x}$ ci si limita ai soli valori positivi e si esclude l'origine, si ottiene una funzione continua. E parimenti, la stessa funzione risulta continua se ci si limita ai soli valori negativi escludendo l'origine. Anche la funzione rappresentata graficamente nella fig. 20 risulta continua fra B e C_1 e fra C_1 e C_2 e fra C_2 e C_3 e così via, sempreché si escludano in ciascun caso i punti terminali. È facile tuttavia trovare delle funzioni che si presentino discontinue in tutti i punti. Si consideri ad esempio una funzione $f(x)$ tale che quando x è un qualsiasi numero frazionario si abbia $f(x) = 2$. Questa funzione è discontinua in tutti i punti.

E finalmente esaminiamo un po' più da vicino la definizione della continuità data sopra. Abbiamo detto

che una funzione è continua quando il suo valore non varia che gradualmente al graduale variare dell'argomento, discontinua quando il suo valore può variare per salti improvvisi. Si tratta appunto di quel tipo di definizione di cui si accontentavano i nostri antenati matematici e di cui i matematici moderni non si accontentano più. Vale la pena di dedicare ad essa un po' di tempo, poiché quando avremo compreso le obiezioni dei moderni contro di essa, saremo già molto vicini a comprendere lo spirito della moderna matematica. La differenza fra la matematica più antica e quella più recente sta tutta nel fatto che negli enunciati esatti di quest'ultima non sono più tollerate espressioni vaghe e semimetaforiche come « gradualmente ». L'odierna matematica non ammette che enunciati, definizioni e dimostrazioni nei quali vengano usati esclusivamente quei pochi concetti semplici concernenti il numero, la grandezza e le variabili, sui quali è fondata la scienza in questione. Di due numeri, uno può essere maggiore o minore dell'altro, ed uno può essere il tale o tal'altro multiplo dell'altro; non esiste invece una relazione di « gradualità » fra due numeri, e perciò il termine in questione è inammissibile. Ora, ciò potrà sembrare a prima vista un'eccesso di pedanteria; ma a questa accusa vi sono due risposte. Anzitutto durante la prima metà del secolo XIX alcuni grandi matematici, e specialmente lo svedese Abel e il tedesco Weierstrass scopersero che un gran numero di enunciati matematici così come si trovavano formulati nella vecchia maniera non eccessivamente scrupolosa, erano semplicemente falsi. Macauly nel suo saggio su Bacone mette in contrasto la certezza della matematica con l'incertezza della filosofia e per portare un esempio eloquente dice: « Non vi è stata alcuna reazione contro il teorema di Taylor ». Egli non avrebbe potuto scegliere un esempio meno indicato. Poiché, anche senza aver preso in esame i testi di matematica inglesi apparsi nell'epoca in cui fu pubblicato quel saggio, si può sicuramente presumere che in ciascuno di essi il teorema di Taylor era enunciato

e dimostrato in maniera sbagliata. La meticolosa precisione della odierna matematica è dunque necessaria se si vogliono ottenere formulazioni esatte. In secondo luogo essa è necessaria anche ai fini della ricerca. Essa favorisce la chiarezza del pensiero e quindi l'audacia del pensiero e la sua fecondità nel tentare nuove combinazioni di idee. Quando gli enunciati iniziali sono vaghi e imprecisi, in ogni fase successiva del pensiero occorre far intervenire il senso comune per porre limiti alle applicazioni e spiegare i significati. Ora nel pensiero creativo il senso comune è un cattivo maestro. Il suo unico criterio di giudizio è che le nuove idee debbono assomigliare alle vecchie. In altri termini esso non può agire che sopprimendo l'originalità.

Per aprirci la via verso una definizione precisa della continuità (applicata alle funzioni) consideriamo più da vicino l'affermazione secondo cui non esiste tra i numeri una relazione di « gradualità ». Ci si può chiedere: « Un numero non può essere soltanto lievemente maggiore di un altro numero; o, in altre parole la differenza tra due numeri non può essere piccola ? ». La difficoltà è tutta qui, e cioè che in astratto e prescindendo da qualche applicazione arbitrariamente presupposta, non vi è qualcosa come un numero grande o un numero piccolo. Un milione di miglia è un numero di miglia piccolo per l'astronomo che stia studiando le stelle fisse, ma un milione di sterline costituiscono un reddito annuo molto grande. Così pure un quarto del proprio reddito è una frazione grande se si tratta di devolverlo in beneficienza, mentre è una frazione piccola se si tratta di destinarlo all'uso privato. Si potrebbe continuare indefinitamente ad accumulare esempi per dimostrare come il piccolo ed il grande intesi in un senso assoluto non possono applicarsi in astratto ai numeri. Di due numeri noi possiamo dire che uno è maggiore o minore dell'altro, non possiamo dire invece che un qualsiasi numero è grande o piccolo, a meno che non ci riferiamo a delle circostanze particolari. Il nostro compito pertanto è di definire la continuità senza far parola in al-

cun modo di una variazione « piccola » o « graduale » nel valore della funzione.

A tale scopo assegneremo dei nomi ad alcuni concetti che ci saranno poi utili anche quando giungeremo a trattare i limiti ed il calcolo differenziale. Un « intervallo » di valori dell'argomento x di una funzione $f(x)$ è l' insieme di tutti i valori compresi tra due valori determinati dell'argomento. Ad esempio l' intervallo fra $x = 1$ e $x = 2$ è costituito da tutti i valori compresi tra 1 e 2 che x può assumere, vale a dire da tutti i numeri reali compresi tra 1 e 2. Non è però necessario che gli estremi di un intervallo siano degli interi. Si dice che un intervallo di valori *contiene* il numero a quando a è un membro dell' intervallo. Ad esempio l'intervallo compreso tra 1 e 2 contiene $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{4}$, ecc.

Si dice che una successione di numeri si avvicina al numero a entro un *grado di approssimazione* k, quando la differenza tra a e ciascun numero della successione è minore di k. Qui k costituisce il grado di approssimazione. Così la successione numerica 3, 4, 6, 8 si avvicina al numero 5 entro il grado di approssimazione 4. In questo caso il grado di approssimazione 4 non è il più piccolo che si sarebbe potuto scegliere: la successione si avvicina a 5 anche entro uno qualsiasi dei gradi di approssimazione 3,1 o 3,01 o 3,001. Ancora, i numeri 3,1, 3,141, 3,1415, 3,14159 si avvicinano a 3,13102 entro il grado di approssimazione 0,032. ed anche entro il più piccolo grado di approssimazione 0,03103.

Questi due concetti di intervallo e dell'approssimazione ad un numero entro un certo grado sono abbastanza facili; l'unica difficoltà è che essi sembrano alquanto banali. Ma quando li si combina con l'ulteriore concetto dell' « intorno » di un numero essi vengono a costituire la base della moderna procedura matematica. Che intendiamo dire quando affermiamo che qualche cosa è vero di una funzione $f(x)$ nell' intorno del valore a dell'argomento x? È questa nozione fondamentale che noi dobbiamo ora precisare.

Si dice che i valori di una funzione $f(x)$ possiedono una proprietà nell' « intorno di a », quando è possibile trovare qualche intervallo il quale: I) contenga il numero a non come estremo, II) sia tale che ogni valore della funzione per argomenti diversi da a che sia compreso nell' intervallo possieda quella proprietà. Quanto al valore $f(a)$, esso può possedere o no la proprietà in questione; con gli enunciati riguardanti *l' intorno di a* non viene affermato nulla in merito.

Supponiamo ad esempio di prendere la particolare funzione x^2. Ora *nell' intorno di* 2 i valori di x^2 sono minori di 5. Infatti noi possiamo trovare un intervallo, per esempio quello da 1 a 2,1, il quale: I) contiene il 2 non come estremo, e II) è tale che per valori di x in esso inclusi x^2 risulta minore di 5.

Se ora combiniamo i concetti precedenti possiamo comprendere che cosa si intende dire quando si afferma che *nell' intorno di a* la funzione $f(x)$ si avvicina a c entro il *grado di approssimazione k*. S' intende dire che è possibile trovare qualche intervallo il quale: I) include a non come estremo, e II) è tale che tutti i valori di $f(x)$ per i quali x è compresa nell' intervallo e non è uguale ad a differiscono da c per meno di k. Ad esempio nell' intorno di 2 la funzione $\sqrt{x}$ si avvicina a 1,41425 entro il grado di approssimazione 0,001. Infatti la radice quadrata di 1,99996164 è 1,4142 e la radice quadrata di 2,00024449 è 1,4143; e quindi per valori di x compresi nell' intervallo da 1,99996164 a 2,00024449 il quale contiene il 2 non come estremo, i valori della funzione $\sqrt{x}$ risultano tutti compresi fra 1,4142 e 1,4143 e perciò differiscono tutti da 1,41425 per meno di 0,0001. In questo caso noi, volendo, possiamo fissare un grado di approssimazione minore, e cioè 0,000051 oppure 0,0000501. Ancora, per prendere un altro esempio, nell' intorno di 2 la funzione x^2 si avvicina a 4 entro il grado di approssimazione 0,5. Infatti $1{,}9^2 = 3{,}61$ e $2{,}1^2 = 4{,}41$ e perciò si è trovato l' intervallo richiesto (1,9 ;2,1) il quale contiene il 2 non come estremo. Questo esempio mette in rilievo come gli enunciati

su di una funzione $f(x)$ nell' intorno di un numero a siano distinti dagli enunciati sul valore di $f(x)$ per $x = a$. Che ci occorre è un *intervallo* nel quale sia vero l'enunciato. Così il semplice fatto che $2^2 = 4$ di per sé stesso non ci autorizza ad affermare che *nell' intorno* di 2 la funzione x^2 è uguale a 4. Questa affermazione sarebbe falsa, perché non si può indicare alcun intervallo che possieda la proprietà richiesta. Così pure il fatto che $2^2 = 4$ di per sé stesso non ci autorizza ad affermare che *nell' intorno* di 2 la funzione x^2 si avvicini a 4 entro il grado di approssimazione 0,5, benché di fatto tale affermazione sia stata or ora dimostrata vera.

Capire le nozioni precedenti significa capire i fondamenti della matematica odierna. Noi faremo ricorso a nozioni analoghe nel capitolo sulle serie ed ancora nel capitolo sul calcolo differenziale. Frattanto noi siamo ora in grado di definire le « funzioni continue ». Si dice che una funzione $f(x)$ è « continua » per un valore a del suo argomento quando nell' intorno di a i suoi valori si avvicinano ad $f(a)$ (cioè al valore di essa per $x = a$) entro ogni grado di approssimazione.

Ciò significa che qualunque sia il grado di approssimazione k scelto, nell' intorno di a $f(x)$ si avvicina ad $f(a)$ entro il grado di approssimazione k. Per esempio x^2 è continua per il valore 2 del suo argomento x, poiché, comunque venga scelto k, è sempre possibile trovare un intervallo il quale I) contiene il 2 non come estremo, e II) è tale che i valori di x^2 per argomenti compresi entro esso si avvicinano a 4 (cioè a 2^2) entro il grado di approssimazione k. Supponiamo di scegliere il grado di approssimazione 0,1; ebbene: $1{,}999^2 = 3{,}996001$, e $2{,}01^2 = 4{,}0401$ ed entrambi questi numeri differiscono da 4 per meno di 0,1; e perciò entro l' intervallo (1,999; 2,01) i valori di x^2 si avvicinano a 4 entro il grado di approssimazione 0,1. In modo simile, quando si voglia provare con qualsiasi altro grado di approssimazione, è sempre possibile indicare un intervallo.

Si consideri l'esempio del convoglio ferroviario. La sua velocità è continua allorché esso passa il disco se

per qualunque velocità che si voglia assegnare (poniamo di un milionesimo di miglio all'ora) è possibile trovare un intervallo di tempo estendendosi prima e dopo l' istante del passaggio tale che in tutti gli istanti in esso compresi la velocità del treno differisca da quella con cui il treno passò il disco per meno di un milionesimo di miglio all'ora; e il medesimo vale per qualunque altra velocità che si voglia assegnare invece di quella di un milionesimo di miglio all'ora.

Capitol XII

LA PERIODICITÀ NELLA NATURA

Tutto il corso della Natura è dominato dall'esistenza di eventi periodici, cioè dall'esistenza di eventi successivi talmente simili tra loro che, senza alcun sforzo di linguaggio, si possono ben chiamare ricorsi del medesimo evento. Ad esempio la rotazione della terra produce il succedersi dei giorni. È vero che, per quanto noi definiamo astrattamente il termine giorno in modo da escludere le particolarità accidentali, ogni giorno risulta però sempre differente dai giorni che lo hanno preceduto. Tuttavia, con una definizione sufficientemente astratta le differenze fra due giorni diversi divengono tenui e praticamente irrilevanti; e ciascun giorno può allora venir considerato come un ricorso del fenomeno della rotazione della terra. Così pure, il moto della terra intorno al sole, determina il ricorso annuo delle stagioni, imponendo un altro ritmo periodico a tutti i processi della natura. Un altro ritmo periodico d' importanza minore è costituito dalle fasi lunari. Nella vita civile moderna con la diffusione dell' illuminazione artificiale, queste fasi hanno una scarsa importanza; ma nei tempi antichi e sotto climi nei quali le giornate sono torride ed i cieli sereni, pare che la vita umana sia stata largamente influenzata dall'esistenza della luce lunare. Così è dalla Siria e dalla Mesopotamia che si son diffuse tra i popoli europei le nostre suddivisioni in settimane ed in mesi con i loro addentellati di carattere religioso; anche se poi, indipendentemente da ciò, si possan trovare presso la maggior parte

dei popoli pratiche regolantisi sulle fasi lunari. Tuttavia la periodicità lunare ha influenzato la storia della terra soprattutto attraverso le maree e non attraverso le sue fasi alterne di luce e di oscurità.

La nostra vita fisica è essenzialmente periodica: essa è dominata dai battiti del cuore e dal ritmo della respirazione. In realtà il presupposto della periodicità è fondamentale per il nostro stesso concetto della vita. Noi non riusciamo ad immaginare un corso della natura nel quale di fronte al procedere degli eventi noi non siamo in grado di dire: «Questo è già accaduto». Se così fosse, verrebbe a mancare del tutto la concezione dell'esperienza come guida per la nostra condotta. Gli uomini si troverebbero sempre dinanzi a situazioni nuove, prive di qualsiasi elemento di identità con qualche fatto della storia passata. Ci mancherebbero persino i mezzi per una misura quantitativa del tempo. È vero che si potrebbe ancora riconoscere che gli eventi si verificano in una successione, in modo che alcuni risulterebbero anteriori ed altri posteriori. Ma noi andiamo più in là di questa semplice ricognizione: non soltanto possiamo dire che tre eventi A, B, C si sono verificati in quest'ordine e cioè che A ha preceduto B e B ha preceduto C, ma possiamo dire altresì che l'intervallo di tempo trascorso fra il verificarsi di A ed il verificarsi di B ebbe lunghezza doppia di quello trascorso fra B e C. Ora, la quantità di tempo dipende essenzialmente dall'osservazione del numero dei ricorsi naturali verificatisi. Noi possiamo dire che la lunghezza del tempo trascorso fra A e B fu di tanti giorni o di tanti mesi o di tanti anni; a seconda del tipo di ricorso cui vogliamo fare appello. In effetto, ai primordi della civiltà questi tre modi di misurare il tempo erano realmente distinti. Uno dei primi còmpiti che la scienza ebbe a svolgere tra i popoli civili o semi-civili fu quello di fondere i tre modi in un unico sistema di misurazione coerente. Bisogna rendersi conto della complessità di un tale còmpito. Occorre determinare non soltanto qual'è il numero di giorni (per esempio 365,25...) che

formano un certo anno, ma occorre altresì determinare in precedenza che gli anni successivi saranno formati dal medesimo numero di giorni. Si può immaginare un mondo in cui esistano sì delle periodicità, ma senza che di queste ve ne siano due coerenti. In certi anni vi potrebbero essere 200 giorni e in altri 350. La determinazione della vasta connessione sistematica delle periodicità più importanti fu il primo passo compiuto dalla scienza della natura. Questa connessione non nasce da alcuna legge astratta ed intuitiva del pensiero; è semplicemente un fatto naturale osservato, attestato dall'esperienza. In effetto essa è così lungi dal costituire una legge necessaria, che non è neppure esattamente vera. Ogni caso particolare presenta delle anomalie. In alcuni casi queste anomalie possono venire facilmente osservate e pertanto risultano immediatamente manifeste. In altri casi per renderle manifeste occorrono le osservazioni più raffinate. Considerando le cose all' ingrosso, tutti i ricorsi dipendenti da organismi viventi, come i battiti del cuore, sono soggetti a variazioni rapide in confronto ad altri ricorsi. I grandi ricorsi ovviamente stabili (stabili nel senso che si accordano tra loro con grande precisione) sono quelli dipendenti dal moto della terra considerata come un tutto e dagli analoghi movimenti dei corpi celesti.

Noi perciò supponiamo che questi ricorsi astronomici contrassegnino degli intervalli di tempo eguali. Ma di fronte alle discrepanze rivelate in essi dalle osservazioni raffinate dell'astronomia come dovremo regolarci? Si direbbe che noi ci troviamo ridotti a supporre arbitrariamente che l'uno o l'altro di questi gruppi di fenomeni contrassegnino tempi uguali (per esempio che tutti i giorni abbiano uguale lunghezza, o che abbiano uguale lunghezza tutti gli anni). Ma non è così: alcune supposizioni sono necessarie, ma il presupposto su cui si fonda tutta la procedura seguita dagli astronomi nel determinare la misura del tempo è che le leggi del moto vengano a trovarsi verificate in modo esatto. Prima di spiegare come venga fatto ciò è interessante notare che l'uso di

affidare agli astronomi la determinazione del tempo deriva dal fatto che, come si è detto, i ricorsi dei quali essi si occupano posseggono una stabile coerenza. Se si fosse notata una siffatta coerenza superiore fra i ricorsi caratteristici dell'organismo umano noi ci saremmo naturalmente affidati ai dottori in medicina per la regolazione dei nostri orologi.

Per comprendere come entrino in causa le leggi del moto si noti che con due modi di misurare il tempo non coerenti fra loro si verranno ad attribuire allo stesso corpo variazioni di velocità differenti. Supponiamo ad esempio che l'ora venga definita come la ventiquattresima parte del giorno e consideriamo il caso di un treno che corra in modo uniforme per due ore alla velocità di venti miglia orarie. Prendiamo ora una misura di tempo grossolanamente incoerente e supponiamo che questa faccia sì che la prima ora venga ad essere lunga il doppio della seconda. Allora, stando a quest'altra misura della durata il tempo della corsa del treno viene ad esser diviso in due parti durante ciascuna delle quali il treno risulta aver percorso la stessa distanza e cioè venti miglia; ma la durata della prima parte è lunga il doppio di quella della seconda parte. Quindi la velocità del treno non è stata uniforme e in media la velocità durante il secondo periodo è stata doppia di quella del primo periodo. In tal modo la questione se il treno abbia corso in maniera uniforme o no dipende totalmente dal tempo base che noi adottiamo.

Ora, per tutti gli scopi ordinari della nostra vita sulla terra, i vari ricorsi astronomici possono venire considerati come assolutamente coerenti; e inoltre, ammettendo la loro coerenza e presupponendo quindi determinate le velocità e i cangiamenti delle velocità possedute dai corpi, noi troviamo che le leggi del moto sopra considerate risultano verificate in modo quasi esatto. Ma è soltanto in modo *quasi* esatto che esse risultano verificate quando si passa a considerare qualcuno dei fenomeni astronomici. Noi troviamo tuttavia che presppuonendo delle velocità leggermente differenti per

la rotazione ed il moto dei pianeti e delle stelle, quelle leggi risulterebbero verificate in modo esatto. Vien fatta allora questa supposizione, e in tal modo noi abbiamo in effetto adottato una misura del tempo che è bensì definita mediante un riferimento ai fenomeni astronomici, ma non in modo tale da esser coerente con l'uniformità di uno qualsiasi di essi. Resta però il gran fatto che il fluire uniforme del tempo su cui tante cose son fondate dipende a sua volta dall'osservazione di eventi periodici.

Persino dei fenomeni che, considerati superficialmente, posson sembrare casuali ed eccezionali oppure dei fenomeni che si conservano con una persistenza uniforme possono esser dovuti alla remota influenza della periodicità. Si consideri ad esempio il principio della risonanza. Il fatto della risonanza sorge allorché due gruppi di eventi connessi hanno la medesima periodicità. Vi è una legge dinamica secondo cui le piccole vibrazioni di tutti i corpi lasciate a sé avvengono in un certo tempo determinato il quale è caratteristico del corpo in questione. Così un pendolo con piccola ampiezza di oscillazione compie sempre le sue oscillazioni in un tempo determinato che dipende dalla forma, dalla distribuzione del peso e dalla lunghezza del pendolo stesso. Un corpo più complesso può avere parecchi modi di vibrare; ma ciascun modo di vibrazione avrà il suo «periodo» peculiare. Questi periodi di vibrazione dei corpi vengono denominati periodi «liberi». Così un pendolo non ha che un solo periodo di vibrazione, mentre un ponte sospeso ne avrà molti. Abbiamo uno strumento musicale, come ad esempio la corda di un violino, allorché i periodi di vibrazione sono tutti sottomultipli semplici del più lungo fra essi; quando cioè, ammesso che il periodo più lungo sia di t secondi, gli altri risultano di $\frac{1}{2}t$, $\frac{1}{3}t$, e così via, dove uno qualsiasi di questi periodi minori può anche mancare. Ora supponiamo di eccitare le vibrazioni di un corpo per mezzo di una causa che sia essa stessa periodica; allora, se il periodo

della causa è press'a poco identico ad uno dei periodi del corpo, quel tipo di vibrazione del corpo viene eccitato in modo molto forte; e ciò anche nel caso che la causa eccitante sia di piccola entità. Questo fenomeno viene denominato «risonanza»; e la ragione dell'uso di questo termine è molto facile a comprendersi. Chiunque voglia rovesciare una pietra oscillante darà delle spinte «in consonanza» con le oscillazioni della pietra in modo da sfruttare sempre il momento favorevole per la spinta. Se le spinte non vengon date in consonanza accadrà che alcune di esse tendono a far aumentare l'oscillazione ma altre la ostacolano. Quando invece vengon date in consonanza dopo un po' di tempo tutte le spinte riescono efficaci. La parola «risonanza» deriva da considerazioni sul suono: ma il fenomeno in questione si estende molto più in là della sfera del suono. È dalla risonanza che dipendono le leggi dell'assorbimento e dell'emissione della luce, la «sintonia» degli apparecchi riceventi nella telegrafia senza fili, la relativa importanza degli influssi dei pianeti sui reciproci moti, il pericolo cui va soggetto un ponte sospeso allorché vi marcian sopra a passo cadenzato delle truppe, i fenomeni di eccessiva vibrazione causati in alcune navi dal battito ritmico delle macchine a determinate velocità. Questa coincidenza delle periodicità può produrre fenomeni duraturi quando vi è un'associazione costante di due eventi periodici, o può produrre effetti violenti e improvvisi quando l'associazione è fortuita e temporanea.

Ancora, le proprietà caratteristiche e i periodi costanti delle vibrazioni sopra menzionate formano il substrato causale di ciò che a noi si manifesta nella forma di eccitazioni sensoriali di carattere stabile. Noi lavoriamo per delle ore con una luce uniforme, od ascoltiamo un suono uniforme che si prolunga invariato. Ma, se la scienza moderna è nel vero questa uniformità non ha alcun corrispettivo in natura. Quella luce stabile è dovuta al fatto che un numero determinato di onde periodiche dell'etere in vibrazione colpiscono l'occhio, e il suono uniforme è dovuto ad onde consimili

dell'aria in vibrazione. Non è qui nostro intento esporre le teorie della luce e del suono. Si è detto abbastanza perché risulti evidente come uno dei primi passi che è necessario compiere per fare della matematica uno strumento adatto all' indagine della Natura sia di render atta tale scienza ad esprimere la essenziale periodicità delle cose. Se non si afferra ciò non è possibile comprendere l' importanza di quelle nozioni matematiche che dobbiamo prender ora in considerazione, vale a dire le funzioni periodiche.

Capitolo XIII

LA TRIGONOMETRIA

La trigonometria non nacque dalla considerazione generale della periodicità della natura. Sotto questo riguardo la storia di tale scienza è analoga a quella delle sezioni coniche, lo studio delle quali ebbe pure origine da considerazioni molto particolari. In realtà un confronto fra la storia delle due discipline mette in luce delle analogie e dei contrasti molto istruttivi. La trigonometria, come la teoria delle sezioni coniche, ebbe origine presso i greci. Il fondatore di essa fu Ipparco (nato verso il 160 a. C.) un astronomo greco che compì le sue osservazioni a Rodi. I servigi ch'egli rese alla astronomia furon molto grandi; quando uscì dalle sue mani essa era divenuta una vera e propria disciplina scientifica con un patrimonio di importanti risultati acquisiti e con le giuste direttive metodiche per un futuro sviluppo. La creazione della trigonometria non fu forse il minore tra questi servigi resi da Ipparco alla scienza che era l'oggetto principale delle sue indagini. Il successivo scienziato che diede impulso alla trigonometria fu Tolomeo, il grande astronomo alessandrino che già abbiamo menzionato. Ma veniamo subito alla grande differenza esistente fra la teoria delle sezioni coniche e la trigonometria. L'origine della trigonometria fu pratica; essa venne creata perché era necessaria per le ricerche astronomiche. L'origine della teoria delle sezioni coniche fu invece puramente teorica: l'unica ragione per cui si iniziò lo studio di tali sezioni fu l' interesse astratto che presentavano i relativi con-

cetti. E, fatto abbastanza caratteristico, la teoria delle sezioni coniche fu creata circa 150 anni prima della trigonometria, propro nel periodo aureo del pensiero greco. Invece l' importanza della trigonometria, sia per lo sviluppo teorico che per le applicazioni della matematica, costituisce uno fra i tanti esempi di nozioni efficaci che la scienza astratta ha acquisito muovendo da applicazioni pratiche.

Cercheremo di render chiaro a noi stessi che cosa sia la trigonometria e perché essa era destinata a sorgere dallo studio scientifico dell'astronomia. Anzitutto: quali sono le misurazioni che possono venir eseguite dall'astronomo ? Sono le misurazioni del tempo e le misurazioni di angoli. L'astronomo può sistemare il suo cannocchiale (poiché è più facile discutere riferendoci al noto strumento di cui si servono gli astronomi moderni) in modo tale che esso possa ruotare soltanto intorno ad un asse fisso diretto da est ad ovest; in tal caso il cannocchiale potrà dirigersi soltanto verso il sud con una maggiore o minore elevazione oppure, nel caso che venga fatto ruotare oltre lo zenit, potrà dirigersi verso il nord. Questo è il cannocchiale dei passaggi, il grande strumento per la determinazione esatta dell' istante in cui le stelle si trovano sul meridiano. Indirettamente però questo strumento misura degli angoli. Infatti quando si è notato li tempo trascorso fra i passaggi di due stelle, ammessa la rotazione uniforme della terra, si ottiene l'angolo di cui la terra ha ruotato in quel tratto di tempo. Inoltre, servendoci di altri strumenti possiamo misurare direttamente l'angolo fra due stelle. Infatti se O è l'occhio ed OA e OB le direzioni in cui son viste le stelle, è facile escogitare degli strumenti per la misurazione dell'angolo AOB. Quando dunque l'astronomo compila una carta della volta celeste egli in realtà misura degli angoli in guisa da stabilire le direzioni relative delle stelle e dei pianeti in un istante qualsiasi. Ancora, nell'analogo problema della misurazione dei terreni sono gli angoli che formano l'oggetto principale delle misurazioni. Solo

raramente è possibile compiere con una certa precisione delle misurazioni dirette delle lunghezze: fiumi, case, foreste, montagne, irregolarità del terreno in generale, tutto ciò fa da impedimento. La mappa di un intero paese verrà a dipendere da una o due sole misurazioni dirette di lunghezza, eseguite con la massima accura-

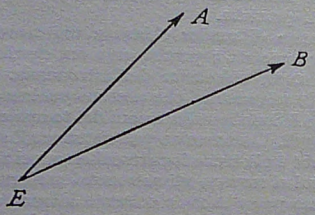

Fig. 22

tezza in località opportunamente scelte come la Piana di Salisbury. Nella compilazione di una mappa, il lavoro principale consiste nella misurazione di angoli. Ad esempio A, B e C potranno essere dei punti facilmente individuabili della regione da misurare, poniamo le cime dei campanili delle chiese Questi punti si possono scorgere, l'uno dall'altro; e allora diventa una cosa molto semplice misurare da A l'angolo BAC e

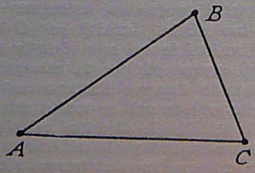

Fig. 23

da C l'angolo BCA. In teoria basterebbe misurare due soltanto di questi angoli, poiché, per un noto teorema di geometria la somma dei tre angoli di un triangolo ammonta a due angoli retti, di guisa che, una volta noti due degli angoli è possibile ricavare il terzo. In pratica tuttavia è meglio misurarli tutti e tre così da annullare qualsiasi piccolo errore di osservazione. Nella compilazione di carte geografiche, un intero paese vien coperto da una rete di triangoli nel modo indicato. Questa operazione vien chiamata triangolazione ed è l'operazione fondamentale da compiere nella misurazione dei terreni.

Ora, quando tutti gli angoli di un triangolo sono noti, è nota la forma del triangolo stesso (la forma in quanto distinta dalle dimensioni). Incontriamo qui il grande principio della similitudine geometrica. Si tratta di una nozione che ci è molto familiare nelle sue applicazioni pratiche. Noi tutti sappiamo che cos' è una pianta disegnata in scala. Così se la scala in cui è disegnata una pianta è di un pollice per iarda, una lunghezza di tre pollici sulla pianta indicherà una lunghezza di tre iarde nell'originale. Le forme disegnate sulla pianta, poi, sono le medesime dell'originale, in guisa che un angolo retto nell'originale ci si presenta anche nella pianta come un angolo retto. Analogamente in una carta geografica, che non è altro che la pianta di un paese, le proporzioni fra le lunghezze sulla carta sono le stesse proporzioni che esistono fra le distanze a cui si trovano tra loro le località indicate, e le direzioni sulla carta si identificano con le direzioni nel paese. Ad esempio se sulla carta geografica una località si trova a nord-nord-ovest di un'altra, allora è così anche nella realtà; il che significa che in una carta geografica gli angoli sono i medesimi che nella realtà. La similitudine geometrica può venir definita in questo modo. Due figure sono simili se I) ad ogni punto dell'una corrisponde un punto dell'altra in modo che per ogni segmento nella prima vi è un segmenta corrispondente nella seconda e per ogni angolo un angolo corrispondente; e II) le lunghezze

dei segmenti corrispondenti sono in un rapporto fisso e le ampiezze degli angoli corrispondenti sono le stesse. Il rapporto fisso tra le lunghezze dei segmenti corrispondenti in una carta geografica (ovvero in una pianta) e nell'originale vien denominato scala della carta. In margine ad ogni carta geografica e ad ogni pianta si deve sempre indicare la scala. Si è già fatto notare come due triangoli aventi gli angoli rispettivamente uguali siano simili. Così, se i due triangoli ABC e DEF hanno uguali l'angolo in A con l'angolo in D, l'angolo in B con quello in E e l'angolo in C con quello in F, allora il rapporto fra DE e AB è il medesimo di quello in cui EF sta a BC e FD sta a CA.Ma per altre figure non è

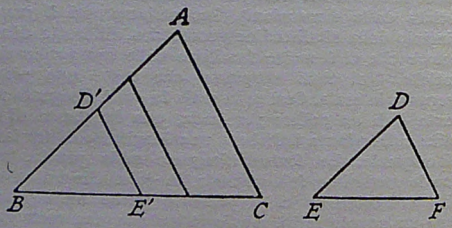

Fig. 24

vero che la semplice uguaglianza degli angoli basti ad assicurare la similitudine. Siano ABCD un quadrato e ABEF un rettangolo. In questo caso tutti gli angoli corrispondenti sono uguali; ma mentre il lato AB del quadrato è uguale al lato AB del rettangolo, il lato BC del quadrato è lungo circa la metà del lato BE del rettangolo, e quindi non è vero che il quadrato ABCD e il rettangolo ABEF siano simili. Quella proprietà peculiare del triangolo, non condivisa da altre figure rettilinee fa di esso la figura fondamentale nella teoria della similitudine. E per questo che nella misurazione dei terreni la triangolazione costituisce l'operazione fonda-

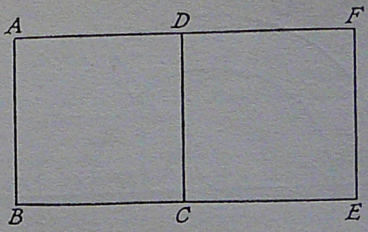

Fig. 25

mentale; ed è pure di qui che è sorta la parola « trigonometria », la quale deriva dalle due parole greche *trigonon*: triangolo e *metria*: misurazione. Il problema fondamentale da cui sorse la trigonometria è questo: Date le ampiezze degli angoli di un triangolo, che cosa si può stabilire circa le lunghezze relative dei lati? Si noti che diciamo « lunghezze *relative* » dei lati, poiché in base alla teoria della similitudine son soltanto i rapporti tra i lati che risultano noti. Per risolvere il problema si introducono certe funzioni dell'ampiezza di un angolo, considerando quest'ultimo come argomento. In origine si pervenne a queste funzioni muovendo dalla considerazione di un triangolo rettangolo, e l'ampiezza dell'angolo veniva definita mediante la lunghezza dell'arco di una circonferenza. Nei trattati elementari moderni questo fondamentale riferimento all'arco della circonferenza come mezzo per definire l'ampiezza dell'angolo è passato alquanto in seconda linea, il che non torna di vantaggio né da un punto di vista teorico, né ai fini della chiarezza espositiva. Si deve anzitutto notare, che, per quanto concerne la similitudine, il cerchio occupa tra le figure curvilinee la stessa posizione tenuta dal triangolo fra le figure rettilinee. Due cerchi qualsiasi sono figure simili e differiscono soltanto per scala. Le lunghezze delle circonferenze di due cerchi

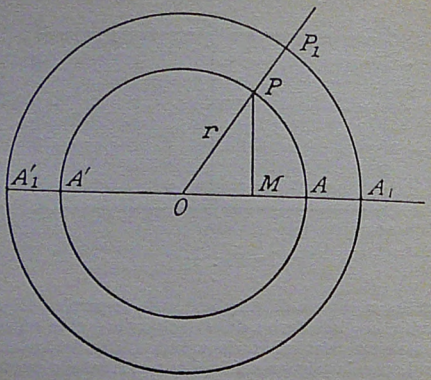

Fig. 26

come APA′ ed A_1 P_1 A_1' nella fig. 26 sono proporzionali alle lunghezze dei rispettivi raggi. Inoltre se due cerchi hanno lo stesso centro O, come avviene dei due cerchi della fig. 26, allora gli archi AP ed A_1 P_1 intercettati dai lati di un qualsiasi angolo AOP sono pure proporzionali ai rispettivi raggi. E perciò il rapporto fra le lunghezza dell'arco AP e la lunghezza del raggio OP, vale a dire $\frac{\text{arco AP}}{\text{raggio OP}}$ è un numero che risulta del tutto indipendente dalla lunghezza OP ed è identico alla frazione $\frac{\text{arco } A_1P_1}{\text{raggio } OP_1}$. Questa frazione «arco diviso raggio» costituisce il modo teoricamente appropriato per misurare l'ampiezza di un angolo; infatti non dipende da alcuna unità di lunghezza arbitrariamente assunta, né da alcun modo arbitrario di dividere un qualsiasi angolo arbitrariamente presupposto, come ad esem-

pio un angolo retto. Perciò la frazione $\frac{AP}{OA}$ rappresenta l'ampiezza dell'angolo AOP. Ora si tracci la PM perpendicolare ad OA. I matematici greci chiamarono il segmento PM seno dell'arco AP ed il segmento OM coseno dell'arco AP. Essi si rendevano pienamente conto che l'importanza delle relazioni esistenti fra queste varie linee dipende dalla teoria della similitudine or ora esposta. Ma essi non si servirono di definizioni che esprimessero le proprietà scaturienti da questa teoria. Essi inoltre non possedevano le moderne nozioni generali sulle funzioni, considerate come correlatrici di coppie di numeri variabili, né in effetto erano a conoscenza di alcun moderno concetto dell'algebra o dell'analisi algebrica. Perciò era cosa naturale per loro pensare unicamente alle relazioni fra certe linee di una figura. Per noi le cose stanno diversamente: noi vogliamo far uso dei nostri concetti dotati di maggiore efficacia.

Di conseguenza nella moderna matematica invece di considerare l'arco AP noi consideriamo il rapporto $\frac{AP}{OP}$ il quale è un numero che rimane identico qualunque sia la lunghezza di OP, ed invece di considerare i segmenti PM ed OM noi consideriamo i rapporti $\frac{PM}{OP}$ ed $\frac{OM}{OP}$ i quali pure sono numeri non dipendenti dalla lunghezza di OP, vale a dire indipendenti dalla scala delle nostre figure. Definiamo allora il numero $\frac{PM}{OP}$ come il *seno* del numero $\frac{PA}{OP}$ e il numero $\frac{OM}{OP}$ come il *coseno* del numero $\frac{PA}{OP}$. Queste espressioni frazionarie sono poco indicate per la stampa; perciò scriveremo u per indicare il rapporto $\frac{AP}{OP}$ che rappresenta l'ampiezza dell'angolo AOP, v per indicare il rapporto $\frac{PM}{OP}$ e w per indicare il

rapporto $\frac{OM}{OP}$. Allora u, v e w sono numeri, e siccome noi stiamo parlando di un angolo qualsiasi AOP, essi sono numeri variabili. Ma tra i loro valori esiste una correlazione tale che una volta dato u (cioè l'angolo AOP) i valori di v e di w risultano determinati in modo univoco. Quindi v e w sono funzioni dell'argomento u. Abbiamo chiamato v seno di u e w coseno di u. Noi vogliamo adattare a questi casi particolari la notazione generale per le funzioni $y = f(x)$, e perciò nella moderna matematica, volendo indicare la particolare funzione del seno, scriviamo *sen* in luogo di 'f' e, volendo indicare la particolare funzione del coseno, scriviamo *cos* in luogo di 'f'. E pertanto coi significati sopra assegnati ad u, v e w si ha:

$$v = sen\ u \quad \text{e} \quad w = cos\ u$$

scrittura nella quale vengono omessi, trattandosi di queste particolari funzioni, le parentesi intorno alla x e il simbolo $f(x)$. Il significato di queste funzioni *sen* e *cos* correlatrici delle coppie di numeri variabili u e v ed u e w sta in ciò: che le relazioni funzionali vanno determinate costruendo (cfr. la fig. 26) un angolo AOP, la cui misura «AP diviso OP» sia uguale ad u, e che v risulta allora il numero dato da «PM diviso OP» e w il numero dato da «OM diviso OP»..

È evidente che, senza ulteriori definizioni, noi verremmo a trovarci in difficoltà nel caso in cui il numero u venisse preso troppo grande. Poiché in questo caso l'arco AP può superare il quarto di circonferenza ed il punto M (cfr. le figg. 26 e 27) può cadere fra O ed A′ invece che fra O ed A. Inoltre P potrebbe anche venire a trovarsi al di sotto della retta AOA′ invece che sopra come nella fig. 26. Per superare queste difficoltà noi, nell'elaborare le nostre definizioni complete del seno e del coseno, ricorriamo ai concetti e alle convenzioni della geometria analitica. Uno dei lati dell'angolo e cioè OA sia l'asse OX; prolunghiamo l'asse in senso opposto così da ottenere la sua parte negativa OX′. Trac-

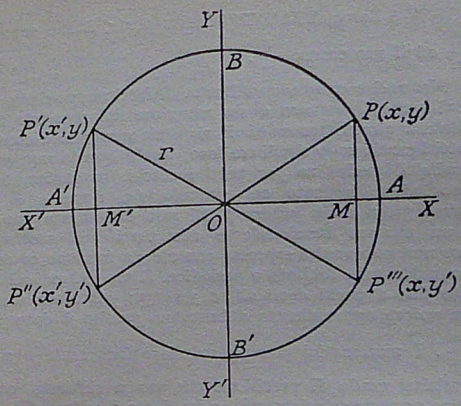

Fig. 27

ciamo l'altro asse YOY' perpendicolare al primo. Un punto qualsiasi P distante r da O abbia le coordinate x ed y. Nel primo «quadrante» del disegno queste coordinate risultano entrambe positive, come avviene ad esempio per le coordinate x ed y di P nella fig. 27. Negli altri quadranti una od entrambe le coordinate risultano negative, come ad esempio x' ed y per il punto P', x' ed y' per P'' ed x ed y' per P''' della fig. 27, dove tanto x' che y' sono numeri negativi. L'angolo positivo POA è l'arco AP diviso per r, il suo seno è y e il suo coseno x; l'angolo positivo AOP' è l'arco ABP' diviso per r, il suo seno è $\frac{y}{r}$ ed il suo coseno $\frac{x'}{r}$; l'angolo positivo AOP'' è l'arco ABA'P'' diviso per r, il suo seno è $\frac{y'}{r}$ ed il suo coseno $\frac{x'}{r}$; l'angolo positivo

AOP''' è l'arco ABA'B'P''' diviso per r, il suo seno è $\frac{y'}{r}$ ed il suo coseno $\frac{x}{r}$.

Ma anche questo non basta. Infatti supponiamo si voglia che il numero u sia maggiore del rapporto fra l'intera circonferenza ed il rispettivo raggio. Siccome tutti i cerchi sono simili tra loro, anche questo rapporto risulta il medesimo per tutti i cerchi. In matematica esso viene indicato col simbolo 2π, dove π è la forma greca della lettera p. Si può dimostrare che π è un numero irrazionale e che perciò il suo valore non può venire espresso con alcuna frazione nè con alcun decimale limitato o periodico. Il suo valore, calcolato fino a pochi decimali, è 3,14159; per molti scopi un valore approssimato abbastanza preciso è dato da $\frac{22}{7}$. I matematici possono calcolare facilmente π con qualsiasi grado di precisione che venga richiesto, così come possono calcolare $\sqrt{2}$, e in effetto il valore di π è stato calcolato fino a 707 decimali. Un calcolo così elaborato costituisce però una mera curiosità e non presenta alcun interesse pratico o teorico. La determinazione accurata di π è uno dei due aspetti del famoso problema della quadratura del cerchio. L'altro aspetto del problema riguarda la possibilità di tracciare, servendosi dei mezzi teorici della geometria pura, un segmento di lunghezza eguale a quella della circonferenza. Si riconosce ora che entrambi gli aspetti del problema non ammettono una soluzione; e questo problema insolubile ha ormai perduto ogni particolare interesse pratico o teorico essendo stato assorbito da concezioni più ampie.

Dopo questa digressione sul valore di π, ritorniamo ora al problema di una definizione generale dell'ampiezza di un angolo, la quale possa fornirci un angolo corrispondente a qualsiasi valore di u. Supponiamo che un punto mobile Q partendo da A sulla OX (cfr. la fig. 27) ruoti lungo la circonferenza nella direzione positiva (nella figura considerata, in senso antiorario) per un numero

qualsiasi di volte, fermandosi da ultimo in un punto qualsiasi; per esempio in P o in P′ o in P″ o in P‴. Allora la lunghezza totale della traiettoria curva circolare percorsa, divisa per il raggio r costituisce la definizione di un angolo positivo di ampiezza qualsiasi. Siano x ed y le coordinate del punto in cui Q si arresta, vale a dire di una delle quattro diverse posizioni indicate nella fig. 27. Nell'uso presente le lettere x ed y possono significare indifferentemente x ed y oppure x' ed y o x' ed y' o x ed y'. Allora il seno di questo angolo così generalizzato è $\frac{y}{r}$ ed il suo coseno $\frac{x}{r}$. Con queste definizioni le relazioni funzionali $v = sen\ u$ e $w = cos\ u$ risultano finalmente definite per tutti i valori reali positivi di u. Per i valori negativi di u basta considerare la rotazione di Q nel senso opposto (senso orario); ma non vale la pena diffonderci ulteriormente su questo punto una volta che è stato spiegato il procedimento generale.

Queste funzioni seno e coseno, così definite ci permettono di affrontare quei problemi riguardanti il triangolo dai quali ebbe origine la trigonometria. Ma noi ora siamo in grado di mettere in relazione la trigonometria con il più ampio concetto della periodicità, la cui importanza è stata spiegata nel precedente capitolo. È facile scorgere che le funzioni $sen\ u$ e $cos\ u$ sono funzioni periodiche di u. Infatti, si consideri la posizione P (nella fig. 27) di un punto mobile Q il quale abbia ruotato sulla circonferenza a partire da A: questa posizione P caratterizza gli angoli: $\frac{\text{arco AP}}{r}$ e $2\pi + \frac{\text{arco AP}}{r}$ e $4\pi + \frac{\text{arco AP}}{r}$ e $6\pi + \frac{\text{arco AP}}{r}$ e così via indefinitamente. Ora tutti questi angoli hanno il medesimo seno ed il medesimo coseno e cioè $\frac{y}{r}$ e $\frac{x}{r}$. Onde riesce facile scorgere che, qualunque sia il valore di u, gli argomenti u, $2\pi + u$, $4\pi + u$, $6\pi + u$, $8\pi + u$ e così via indefi-

nitamente hanno tutti gli stessi valori per i corrispondenti seni e coseni. In altre parole

$$sen\ u = sen\ (2\pi+u) = sen\ (4\pi+u) = sen\ (6\pi+u) = \text{ecc.}$$
$$cos\ u = cos\ (2\pi + u) = cos\ (4\pi + u) = cos\ (6\pi + u) = \text{ecc.}$$

Si esprime questo fatto dicendo che *sen u* e *cos u* sono funzioni periodiche con periodo uguale a 2π.

Il grafico della funzione $y = sen\ x$ (si osservi che abbandoniamo ora la v e la u per usare la y e la x che ci sono più famigliari) è indicato nella fig. 28. Noi prendiamo una qualsiasi lunghezza arbitraria sull'asse delle x per rappresentare il numero π, ed una qualsiasi lunghezza arbitraria sull'asse delle y per rappresentare il numero 1. I valori numerici del seno e del coseno non possono mai superare l'unità. Si noterà il ripetersi della figura a periodi di 2π. Questo grafico rappresenta il tipo più semplice di funzione periodica a partire dal quale vengono costruite tutte le altre. Il coseno non ci dà nulla di fondamentalmente diverso dal seno; è facile infatti dimostrare che $cos\ x = sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, dal che risulta che il grafico di $cos\ x$ non è altro che la fig. 28 modificata in guisa che l'asse YOY′ passi per quel punto della OX individuato da $\frac{\pi}{2}$ invece di trovarsi nella posizione che esso occupa effettivamente nella figura.

È facile costruire una funzione «seno» nella quale

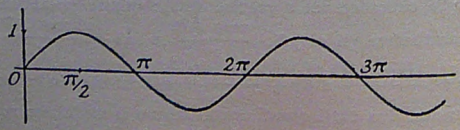

Fig. 28

il periodo abbia un valore prefissato a. Basta infatti

scrivere:

$$y = sen\ \frac{2\pi x}{a}$$

si ha allora:

$$sen\ \frac{2\pi\ (x+a)}{a} = sen\ \left\{\frac{2\pi x}{a} + 2\pi\right\} = sen\ \frac{2\pi x}{a}$$

E quindi il periodo di questa nuova funzione è ora uguale ad a. Diamo ora una definizione generale di ciò che si intende per funzione periodica. La funzione $f(x)$ è periodica, con periodo a se: I) per qualsiasi valore di x abbiamo $f(x) = f(x + a)$, e II) non esiste alcun numero b minore di a tale che per qualsiasi valore di x sia $f(x) = f(x + b)$.

Nella definizione viene introdotta anche la seconda clausola perché, quando abbiamo $sen\ \frac{2\pi x}{a}$, tale funzione è periodica non soltanto con periodo a, ma anche con i periodi $2a$, $3a$, ecc.; e questo perché:

$$sen\ \frac{2\pi\ (x+3a)}{a} = sen\ \left(\frac{2\pi x}{a} + 6\pi\right) = sen\ \frac{2\pi x}{a}.$$

È quindi il periodo più piccolo che noi vogliamo determinare per chiamarlo *il* periodo della funzione. La maggior parte della teoria astratta delle funzioni periodiche e l' intero campo delle applicazioni della teoria stessa alla fisica sono dominati da un importante teorema detto teorema di Fourier, il quale afferma che se $f(x)$ è una funzione periodica con periodo a, ed $f(x)$ soddisfa inoltre certe condizioni che in pratica son sempre presupposte nelle funzioni relative ai fenomeni naturali, allora $f(x)$ può scriversi come somma di una serie di termini nella forma

$$c_0 + c_1\ sen\ \left(\frac{2\pi x}{a} + e_1\right) + c_2\ sen\ \left(\frac{4\pi x}{a} + e_2\right) +$$
$$+ c_3\ sen\ \left(\frac{6\pi x}{a} + e_3\right) + \text{ecc.}$$

In questa formula c_0, c_1, c_2, c_3 ecc., come pure e_1, e_2, e_3 ecc. sono costanti scelte in modo adatto alla funzione particolare in questione. Ma possiamo ancora chiederci: Quanti termini occorre prendere? E qui si presenta una nuova difficoltà, poiché è possibile dimostrare che, quantunque in certi casi particolari possa andar bene un numero determinato di termini, in generale invece noi non potremo far altro che approssimarci quanto vogliamo alla funzione prendendo un numero di termini sempre maggiore. Questo procedimento di approssimazione graduale ci porta a considerare la teoria delle serie infinite: una parte essenziale della teoria matematica che prenderemo in esame nel prossimo capitolo.

Il suaccennato metodo per esprimere una funzione periodica come somma di seni prende il nome di «analisi armonica» della funzione. Ad esempio: in ogni punto della costa marina le maree s' innalzano e si abbassano periodicamente. Così in un punto presso lo Stretto di Dover vi saranno due maree al giorno, dovute alla rotazione della terra. Il quotidiano innalzarsi ed abbassarsi delle maree subisce delle complicazioni in quanto esistono due onde di marea: una che sale lungo la Manica, e l'altra che dopo aver girato attorno al Nord della Scozia è discesa verso sud per il Mare del Nord. Inoltre alcune alte maree hanno un'altezza maggiore di altre, a motivo del fatto che, oltre alla luna, anche il sole contribuisce a produrre le maree. In tal modo vengono ad introdursi dei periodi mensili ed altri periodi ancora. Lasciando da parte l' influenza eccezionale dei venti che non può esser prevista, il problema generale dell'analisi armonica delle maree sta nel trovare delle serie di termini come quelli che figurano nella precedente espressione di pagina 139, tali che ognuna di esse determini con esattezza approssimata l'apporto che i vari influssi generatori delle maree relativi ad un «periodo» recano all'altezza della marea in un istante qualsiasi. L'argomento x sarà perciò il tempo, calcolato a partire da un qualsiasi momento iniziale opportunamente scelto.

Anche il movimento vibratorio di una corda di violino è suscettibile di una analoga analisi armonica, e il medesimo si può dire per le vibrazioni dell'etere e dell'aria corrispondenti rispettivamente alle onde luminose ed alle onde sonore. Siamo qui in presenza di uno dei procedimenti fondamentali della fisica matematica — si tratta nientemeno che del metodo generale con cui essa tratta il grande fatto naturale della periodicità.

Capitolo XIV

LE SERIE

Il grande argomento delle serie è, tra le varie parti della matematica, quella che più va soggetta agli svantaggi del modo banale in cui viene presentata inizialmente ai principianti. Si prendono in considerazione due esempi secondari di serie e cioè le serie aritmetiche e le serie geometriche; questi due esempi sono importanti, essendo i più semplici esempi di un' importante teoria generale. Ma i concetti generali non vengono mai esposti, cosicché quegli esempi che non riescono ad esemplificare nulla finiscono col ridursi ad insignificanti banalità.

Il concetto matematico generale di serie [1] è quello di un gruppo di oggetti disposti ordinatamente, cioè in una successione. Questo significato trova una esatta espressione nell'uso comune del termine. Consideriamo ad esempio la serie dei primi ministri inglesi del secolo XIX disposti nell'ordine della loro prima assunzione di quella carica nel corso del secolo. La serie comincia con Guglielmo Pitt e finisce con Lord Rosebery il quale, cosa abbastanza appropriata, è il bio-

---

[1] Benché nella letteratura matematica italiana il termine « serie » venga di solito riservato ad indicare una addizione di infiniti addendi, qui alcune pecularità del contesto ci hanno consigliato di attenerci alla terminologia dell'A., il quale usa un medesimo termine (*series*) talora per indicare delle *addizioni*, talora, e più spesso, per indicare delle semplici *successioni* (n. d. tr.).

grafo del primo membro della serie. Noi avremmo potuto considerare altri ordini seriali secondo i quali disporre questi uomini: avremmo potuto ad esempio ordinarli a seconda della loro altezza o del loro peso. Trattandosi di primi ministri questi ultimi tipi di ordine ci appaiono irrilevanti e non si presentano in modo spontaneo alla nostra mente; ma da un punto di vista astratto sono anch'essi dei tipi di ordine, buoni come qualsiasi altro. Quando un determinato ordine fra certi termini si presenta come di gran lunga più importante o più ovvio di altri ordini, lo si considera spesso come *l'*ordine di quei termini. Così con l'espressione *l'*ordine degli interi si suole indicare l'ordine in cui questi vengono a trovarsi quando sono disposti in ordine di grandezza. Ma naturalmente si potrebbe disporli anche i un numero indefinito di altri modi. Quando il numero degli oggetti considerati è finito, il numero dei modi in cui si può ordinarli vien detto il numero delle loro permutazioni. Il numero delle permutazioni di un gruppo di n oggetti, dove n è un intero finito, è $n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \ldots\ldots \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ vale a dire il prodotto dei primi n interi. Questo prodotto è così importante in matematica che per esso viene usata una speciale rappresentazione simbolica e il prodotto viene sempre scritto « $n!$ ». Si ha quindi $2! = 2 \times 1 = 2$, $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$, $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$, $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$. Al crescere di n il valore di $n!$ aumenta molto rapidamente; così $100!$ è cento volte maggiore di $99!$.

Per valori di n piccoli è facile verificare che $n!$ è il numero dei modi in cui si possono ordinare n oggetti. Si considerino ad esempio due oggetti a e b: essi possono venir ordinati in due modi ab e ba, e per l'appunto $2! = 2$.

Ancora si prendano tre oggetti a, b e c: essi possono venir ordinati in sei modi abc, acb, bac, bca, cab, cba, e per l'appunto $3! = 6$. Analogamente per i ventiquattro modi in cui si possono ordinare quattro oggetti a, b, c e d.

Quando si passa ad un gruppo infinito di oggetti — come ad esempio il gruppo di tutti gli interi o di tutte le frazioni o di tutti i numeri reali — subito ci si imbatte nelle complicazioni della teoria dei tipi di ordine. Si è toccato questo argomento nel capitolo VI allorché vennero considerati i possibili ordini degli interi e delle frazioni e dei numeri reali. Nel suo insieme la questione dei tipi di ordine forma una branca relativamente nuova della matematica, e una branca molto importante. Noi non ci fermeremo ulteriormente su questo punto. Tutte le serie infinite che considereremo ora hanno lo stesso tipo d'ordine degli interi disposti in ordine crescente di grandezza, in guisa cioè che vi sia un primo termine e che ciascun termine abbia una coppia di vicini immediati, uno per parte, ad eccezione del primo termine il quale naturalmente ha un solo vicino immediato. Così se m è un intero qualsiasi (diverso da zero) vi sarà sempre un termine $m.^{mo}$. Una serie con numero finito di termini (poniamo con n termini) ha, per quanto concerne i vicini immediati, le stesse caratteristiche di una serie infinita; differisce da una serie infinita unicamente per il fatto di avere un termine ultimo e cioè l' $n.^{mo}$.

L'operazione importante da compiere sopra una serie di numeri — d'ora innanzi useremo il termine 'serie' nel senso ristretto or ora indicato — consiste nel sommarne i successivi termini.

Così se u_1, u_2, u_3, ... u_n, ..., sono rispettivamente il 1°, il 2°, il 3°, il 4° .... l' n^o .... termine di una serie di numeri, noi formiamo la nuova serie u_1, $u_1 + u_2$, $u_1 + u_2 + u_3$, $u_1 + u_2 + u_3 + u_4$, e così via; così la somma dei primi n termini si può scrivere

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n.$$

Se la serie ha soltanto un numero finito di termini, noi, procedendo in questo modo, giungeremo da ultimo alla somma di tutta la serie dei termini. Ma se la serie ha un numero infinito di termini, allora questo procedimento consistente nella formazione delle suc-

cessive somme dei termini resta sempre incompiuto; ed in tal senso non esiste qualcosa che possa indicarsi come la somma di una serie infinita.

Ma perché è importante addizionare successivamente in questo modo i termini di una serie? La risposta è che noi abbiamo qui una rappresentazione simbolica del fondamentale procedimento mentale dell' approssimazione. È questo un procedimento la cui importanza si estende molto al di là delle regioni della matematica. Se un argomento è molto complicato, la nostra mente limitata non può trattarlo tutto in una volta, e perciò noi facciam ricorso ad un metodo di approssimazione. Ad esempio l'uomo politico nel delineare lo schema di un discorso stende dapprima i punti più importanti, lasciando che i particolari vadano a cadere in maniera naturale nelle loro posizioni subordinate. Certo, vi è anche il metodo opposto, quello artistico, consistente nello stimolare la fantasia con la presentazione di particolari subordinati o minuti per elevarsi poi gradatamente al punto culminante. Ma in entrambi i casi si ha un progressivo assommarsi di effetti; e questo è per l'appunto ciò che vien fatto con l'addizione successiva dei termini di una serie. Il nostro modo ordinario di procedere nel formare i numeri è un siffatto processo di sommazione successiva; questo almeno nel caso di numeri elevati. Così il numero 568·213 si presenta alla nostra mente come un unico numero

$$500\,000 + 60\,000 + 8\,000 + 200 + 10 + 3.$$

Se si tratta poi di frazioni decimali la cosa è anche più esplicita. Così 3,14159 è

$$3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{9}{100000}$$

Abbiamo inoltre che

$$3,\quad 3 + \frac{1}{10},\quad 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100},\quad 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000},\quad 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000}$$

sono successive approssimazioni al risultato completo 3,14159. Se noi leggiamo 568 213 a ritroso cioè da destra verso sinistra cominciando dalle tre unità, allora procediamo alla maniera artistica preparando a poco a poco la mente al punto culminante rappresentato dal 500 000.

Il procedimento ordinariamente seguito per la moltiplicazione di numeri si svolge mediante la sommazione di una serie. Si consideri il calcolo

$$\begin{array}{r} 342 \\ 658 \\ \hline 2736 \\ 1710 \\ 2052 \\ \hline 225036 \end{array}$$

Qui le tre righe da addizionare formano una serie di cui la riga superiore è il primo termine. In questa serie si trova applicato il metodo artistico, consistente nel presentare per ultimo il termine più importante, non per ragioni estetiche ma a motivo del vantaggio che si ottiene fissando in modo sicuro il posto delle unità e riuscendo così ad omettere alcuni zeri che formalmente sarebbero necessari.

Ma quando noi compiamo un processo di approssimazione addizionando gradualmente i termini successivi di una serie a che cosa ci approssimiamo? La difficoltà sta in ciò, che la serie non ha una «somma» nel senso vero e proprio della parola, poiché l'operazione consistente nell'addizionare i suoi termini non può mai venire esaurita. La risposta è che ciò a cui ci approssimiamo è il *limite* della sommazione della serie, e noi dobbiamo ora accingerci a spiegare che cos' è il «limite di una serie».

La sommazione di una serie tende ad un limite quando la somma di un qualsiasi numero abbastanza grande dei suoi termini è pressoche uguale al limite e lo è nella

misura da noi voluta. Ma questa spiegazione di ciò che significa il tendere a un limite non può evidentemente resistere alla critica rigorosa della moderna matematica. Che significano espressioni come *abbastanza grande*, *pressoche uguale*, e *nella misura da noi voluta*? Tutte queste espressioni vaghe vanno ricondotte a quelle nozioni semplici, astratte che sole possono venire ammesse nella matematica pura.

I termini successivi della serie siano u_1, u_2, u_3, u_4, ..., u_n, ecc., in guisa che u_n venga ad essere il termine n.mo della serie. Inoltre s_n sia la somma dei primi n termini, qualunque possa essere n, in guisa che:

$$s_1 = u_1 \quad s_2 = u_1 + u_2 \quad s_3 = u_1 + u_2 + u_3 \text{ ed } s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n .$$

In tal modo i termini s_1 s_2 s_3 .... s_n, formano una nuova serie, la quale risulta dalla sommazione della serie originaria. Allora il « tendere » della *sommazione* della serie originaria ad un « limite » significa il « tendere dei *termini* di questa nuova serie ad un limite ». E noi dobbiamo ora spiegare che cosa significa il tendere dei termini di una serie ad un limite.

Ora, ricordando la definizione del *grado di approssimazione* (data nel capitolo XI) possiamo dire che la nozione di limite significa questo: l è il limite cui tendono i termini della serie s_1, s_2, s_3, ... s_n ...., se, in corrispondenza di ogni numero reale k preso come grado di approssimazione, si può trovare un termine s_n della serie tale che tutti i termini successivi (e cioè s_{n+1}, s_{n+2}, ecc.) si avvicinano ad l entro quel grado di approssimazione. Se si sceglie un altro grado di approssimazione più piccolo k' è possible che s_n non sia abbastanza avanti nella serie; ma allora si potrà trovare un termine ulteriore s_m fornito della suddetta proprietà.

Se vale questa proprietà allora è evidente che procedendo lungo la serie s_1, s_2 s_3, ..., s_n, ..., da sinistra a destra, dopo un certo tempo si perverrà a termini i quali sono *tutti* più prossimi a l di qualsiasi numero che si voglia assegnare ad arbitrio. In altre parole, ci si

approssima ad l quanto si vuole. Si noterà subito la stretta connessione esistente fra questa definizione del limite di una serie e la definizione di funzione continua che è stata data nel capitolo XI.

Ritornando allora alla serie primitiva $u_1, u_2, u_3, \ldots$ $u_n, \ldots$, abbiamo che il limite dei termini della serie $s_1, s_2, s_3 \ldots s_n \ldots$, vien chiamato « somma all'infinito » della serie primitiva. Ma è evidente che questo uso del termine « somma » è alquanto artificioso e che noi non possiamo presupporre qui senza una particolare discussione proprietà analoghe a quelle della somma ordinaria di un numero finito di termini.

Consideriamo un esempio di « somma all' infinito »: si prenda il decimale periodico 0,1111.... Questo decimale non è che un modo di rappresentare simbolicamente la « somma all' infinito » della serie 0,1; 0,01; 0,001; ecc. La corrispondente serie che si ottiene per sommazione è: $s_1, = 0{,}1$; $s_2, = 0{,}11$; $s_3 = 0{,}111$; $s_4 = 0{,}1111$; ecc. Il limite cui tendono i termini di questa serie è $\frac{1}{9}$; è facile constatare ciò mediante una semplice divisione; infatti

$$\frac{1}{9} = 0{,}1 + \frac{1}{90} = 0{,}11 + \frac{1}{900} = 0{,}111 + \frac{1}{9000} = \text{ecc.}$$

E quindi se vien prefissato ad esempio il numero $\frac{3}{17}$ (il k della definizione), 0,1 e tutti i termini successivi vengono a differire da $\frac{1}{9}$ per meno di $\frac{3}{17}$; se vien prefissato il numero $\frac{1}{1000}$ (un altro possibile valore per il k della definizione), 0,111 e tutti i termini successivi vengono a differire da $\frac{1}{9}$ per meno di $\frac{1}{1000}$, e così via, comunque venga scelto k.

È evidente che nulla di quanto si è detto ci fornisce la minima idea del come sia possibile calcolare la « somma all' infinito » di una serie. Noi abbiamo soltanto indicate le

condizioni cui deve soddisfare un numero siffatto. In realtà il problema del metodo generale per trovare in tutti i casi la somma all' infinito di una serie è fuori questione per un motivo essenziale e cioè per la semplice ragione che una tale « somma » così come la si è definita qui, non sempre esiste. Le serie che posseggono una somma all' infinito vengon dette *convergenti*, mentre quelle che non posseggono una somma all' infinito vengon dette *divergenti*.

Un esempio ovvio di serie divergente è la serie, 1, 2, 3,.... n, ..., cioè la serie degli interi disposti in ordine di grandezza. Infatti qualunque numero n si tenti di prendere come somma all'infinito di tale serie e qualunque sia il grado di approssimazione k da noi scelto, è sempre possibile, prendendo un numero abbastanza grande di termini della serie, far sì che la loro somma differisca da l per un numero maggiore di k. Un altro esempio di serie divergente è 1, 1, 1, ecc., cioè la serie i cui termini son tutti uguali a 1. In tal caso la somma di n termini è n, e questa somma cresce indefinitamente al crescere di n. Un altro esempio ancora di serie divergente è dato da 1,— 1, 1,— 1, 1,— 1, ecc., cioè dalla serie i cui termini sono alternativamente 1 e — 1. La somma di un numero dispari di termini è 1 e quella di un numero pari di termini è 0. E perciò i termini della serie $s_1, s_2, s_3, \ldots\ldots s_n \ldots\ldots$, non tendon ad un limite, sebbene essi non crescano illimitatamente.

Si è tentati di supporre che la condizione richiesta affinché $u_1, u_2, u_3, \ldots\ldots u_n \ldots\ldots$, abbia una somma all' infinito sia che u_n decresca indefinitamente al crescere di u. Ma se le cose stessero effettivamente così la matematica risulterebbe una scienza molto più facile di quel che è; purtroppo la supposizione non è vera.

Ad esempio la serie

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\ldots \frac{1}{n}, \ldots\ldots$$

è divergente. È facile rendersi conto di ciò: infatti, si consideri la somma di n termini a partire dall' $(n + 1)^{mo}$.

Questi n termini sono: $\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+3} \cdots \frac{1}{2n}$; il loro numero è n ed $\frac{1}{2n}$ è il minore di essi. Perciò la loro somma è maggiore di n volte $\frac{1}{2n}$, vale a dire è maggiore di $\frac{1}{2}$. Ora noi possiamo, senza alterare la somma all' infinito, nel caso che essa esista, addizionare i termini vicini ottenendo la serie

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} + \frac{1}{4}, \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}, \text{ ecc.}$$

è cioè, per quanto si è detto sopra, una serie i cui termini dopo il secondo sono maggiori di quelli della serie

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \text{ ecc.}$$

nella quale tutti i termini dopo il primo sono uguali. Ma questa serie è divergente; e perciò la serie primitiva è divergente [1].

---

[1] Se una serie avente tutti i termini positivi è convergente, la nuova serie che si ottiene rendendo alcuni termini positivi ed altri negativi secondo una qualsiasi regola determinata, risulta pure convergente. Ciascuna serie del gruppo così determinato, compresa pure la serie primitiva, vien detta « assolutamente convergente ». Ma è possibile che una serie con termini in parte positivi e in parte negativi sia convergente, pur essendo divergente la corrispondente serie con tutti i termini positivi. Per esempio la serie

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \text{ecc.}$$

è convergente, benché, come abbiamo dimostrato or ora, la

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \text{ecc.}$$

sia divergente. Tali serie convergenti ma non assolutamente convergenti sono molto più difficili da trattare delle serie assolutamente convergenti.

Questa questione della divergenza dimostra quanto si debba andar cauti nell'argomentare dalle proprietà della somma di un numero finito di termini a quelle della somma di una serie infinita. Poiché la proprietà più elementare di un numero finito di termini è che, naturalmente, essi posseggono una somma; mentre persino questa proprietà fondamentale non è necessariamente posseduta da una serie infinita. Con questa esortazione alla cautela si intende semplicemente dire che noi non dobbiamo lasciarci trarre in inganno da quanto potrebbe suggerirci il termine tecnico «*somma* di una serie infinita». La somma della serie infinita

$$u_1, u_2, u_3, \ldots . u_n \ldots .,$$

viene di solito indicata con

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots . + u_n + \ldots .$$

Veniamo ora a quella generalizzazione del concetto di serie, che la matematica, fedele al suo metodo, ottiene mediante l'uso della variabile. Finora noi abbiamo considerato soltanto delle serie nelle quali ogni termine era un numero determinato. Ma noi possiamo benissimo generalizzare e far sì che ogni termine sia un'espressione matematica contenente la variabile x. Così possiamo considerare la serie $1, x, x^2, x^3, \ldots . x^n \ldots .$, o la serie

$$x, \frac{x^2}{2}, \frac{x^3}{3}, \ldots . \frac{x^n}{n}, \ldots .$$

Allo scopo di rappresentare simbolicamente la nozione generale di una qualsiasi di tali funzioni, si immagini una funzione di x, poniamo $f_n(x)$, la quale implica nella sua formazione un intero variabile n; allora dando a n successivamente i valori 1, 2, 3, ecc. si ottiene la serie

$$f_1(x), f_2(x), f_3(x) \ldots . f_n(x), \ldots .$$

Tale serie può essere convergente per certi valori di x e divergente per altri. In effetto è alquanto raro trovare una serie implicante una variabile x, la quale risulti convergente per tutti i valori di x — o almeno, in un

qualsiasi caso particolare è molto arrischiato presupporre che sia così. Esaminiamo ad esempio il più semplice fra tutti i casi e cioè la serie « geometrica »

$$1,\ x,\ x^2,\ x^3, \ldots .\ x^n, \ldots .$$

La somma di n termini è data da

$$s_n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots . + x^n$$

Ora moltiplicando entrambi i membri per x si ottiene:

$$xs_n = x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots . + x^n + x^{n+1}.$$

E sottraendo membro a membro:

$$s_n\ (1 - x) = s_n - xs_n = 1 - x^{n+1}.$$

e quindi (ammesso che x sia diverso da 1)

$$s_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x} - \frac{x^{n+1}}{1 - x}.$$

Ora, se x è in valore assoluto minore di 1, per valori di n abbastanza grandi $\frac{x^{n+1}}{1 - x}$ è sempre in valore assoluto minore di k, comunque venga fissato k. Perciò se x è in valore assoluto minore di 1 la serie $1,\ x,\ x^2,\ \ldots .\ x^n, \ldots .$ è convergente ed $\frac{1}{1 - x}$ è il suo limite. Questo enunciato viene rappresentato simbolicamente come segue:

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \ldots .\ x^n + \ldots ., \quad (-1 < x < 1).$$

Ma se x è in valore assoluto maggiore di 1 od uguale a 1, la serie è divergente. In altre parole, se x è compreso fra -1 e $+1$ la serie è convergente, ma se x è uguale a -1 o a $+1$ oppure è esterno all' intervallo $(-1, +1)$; allora la serie è divergente. Pertanto la serie risulta convergente in tutti i « punti » compresi nell' intervallo $(-1, +1)$, con esclusione dei punti estremi.

A questo punto della nostra ricerca sorge un'altra questione. Supponiamo che la serie

$$f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \ldots .\ f_n(x) + \ldots .$$

sia convergente per tutti i valori di x interni all' intervallo (a, b), vale a dire sia convergente per ogni valore di x maggiore di a e minore di b. Supponiamo inoltre ci si voglia accertare che nel processo di approssimazione al limite noi addizioniamo un numero di termini sufficiente a farci giungere entro un certo grado di approssimazione k. È sempre possibile stabilire un certo numero di termini, poniamo n, tale che se noi prendiamo n o più termini per formare la somma, allora, *qualunque* sia il valore assunto dalla x entro l' intervallo, si abbia sempre l'approssimazione nel grado voluto ?

Ora, qualche volta ciò è possibile per ogni valore di k, e qualche volta no. Quando ciò è possibile la serie vien detta uniformemente convergente in quell' intervallo, e quando non è possibile la serie vien detta non uniformemente convergente in quell' intervallo. L'essere o no una serie uniformemente convergente entro un intervallo dà luogo a notevoli differenze nella proprietà della serie stessa. Illustriamo la cosa con l'esempio più semplice e i numeri più semplici.

Si consideri la serie geometrica

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$$

Essa è convergente nell' intervallo $(-1, +1)$, esclusi i valori estremi $x = \pm 1$.

Ma essa non è uniformemente convergente in questo intervallo. Infatti se $s_n(x)$ è la somma di n termini, la differenza fra $s_n(x)$ e il limite $\frac{1}{1-x}$ è, come abbiamo dimostrato, uguale a $\frac{x^{n+1}}{1-x}$. Ora supponiamo che n sia un numero dato qualsiasi di termini, poniamo 20, e k sia un qualsiasi grado di approssimazione stabilito, poniamo 0,001. Allora, prendendo x abbastanza prossimo a $+1$ o abbastanza prossimo a -1 noi possiamo rendere il valore assoluto di $\frac{x^{21}}{1-x}$ maggiore di 0,001. E perciò 20 termini non potranno esser sufficienti lungo

tutto l' intervallo, benché siano più che sufficienti lungo alcune parti di esso.

La stessa considerazione vale per qualsiasi altro numero che noi possiamo prendere invece di 20, e per qualsiasi grado di approssimazione che noi possiamo stabilire invece di 0,001. E perciò la serie geometrica $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$ è convergente non uniformemente lungo l' intervallo di convergenza $(-1, +1)$. Ma se noi prendiamo un qualsiasi intervallo più piccolo, i cui estremi siano entrambi interni all' intervallo $(-1, +1)$, la serie geometrica risulta uniformemente convergente all' interno di questo intervallo. Consideriamo ad esempio l' intervallo $\left(0, +\frac{1}{10}\right)$ In tal caso qualsiasi valore di n il quale renda $\frac{x^{n+1}}{1-x}$ in valore assoluto minore di k in questi punti estremi, serve anche per tutti i valori di x compresi fra gli estremi stessi; si ha infatti che $\frac{x^{n+1}}{1-x}$ diminuisce in valore assoluto al diminuire in valore assoluto di x. Si prenda ad esempio $k = 0{,}001$; allora, ponendo $x = \frac{1}{10}$ abbiamo:

$$\text{per } n = 1, \quad \frac{x^{n+1}}{1-x} \quad \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^2}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{90} = 0{,}0111\ldots,$$

$$\text{per } n = 2, \quad \frac{x^{n+1}}{1-x} = \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^3}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{900} = 0{,}00111\ldots,$$

$$\text{per } n = 3, \quad \frac{x^{n+1}}{1-x} = \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^4}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{9000} = 0{,}000111\ldots$$

E quindi tre termini andranno bene per l' intero intervallo, benché, naturalmente, per alcune parti dell' intervallo siano più di quanto occorre. Si noti che essendo la serie

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

convergente (benché non uniformemente) lungo l' intervallo $(-1, +1)$, per ogni valore di x compreso nell' intervallo si può trovare qualche numero di termini n che soddisfi un certo grado di approssimazione da noi desiderato; ma a mano a mano che nel prendere i valori di x ci avviciniamo all'uno o all'altro dei valori estremi -1 e $+1$, dovremo servirci di valori di n sempre maggiori.

È curioso notare come questa importante distinzione fra convergenza uniforme e convergenza non uniforme non sia stata scoperta che nel 1847 dallo Stokes (divenuto poi Sir George Stokes), e più tardi e indipendentemente dal matematico tedesco Seidel.

I punti critici nei quali compare la convergenza non uniforme non è necessario si trovino agli estremi dell' intervallo lungo il quale si verifica la convergenza. Questa ultima è una particolarità relativa alla serie geometrica.

Nel caso della serie geometrica $1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$, è possibile indicare come limite, nell' intervallo di convergenza, un'espressione algebrica semplice e cioè $\frac{1}{1-x}$. Ma non sempre è così. In molti casi si può dimostrare che una serie è convergente entro un certo intervallo senza sapere altro circa il suo limite eccetto che esso è il limite della serie. Questo però è un ottimo modo di definire una funzione; e cioè la si può definire come limite di una serie convergente infinita. In realtà è in questo modo che vengono definite o dovrebbero venire definite molte funzioni.

Così la serie più importante nell'analisi elementare è

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots,$$

dove $n!$ ha il significato definito sopra in questo capitolo. Si può dimostrare che questa serie è assolutamente convergente per *tutti* i valori di x e che è uniformemente convergente entro qualsiasi intervallo che si voglia considerare. Perciò essa ha tutte quelle vantaggiose proprietà matematiche che sono desiderabili in una serie. La si denomina serie esponenziale. Indichiamo con $exp\, x$ la somma all'infinito di tale serie. Allora per definizione si ha:

$$exp\, x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

La funzione $exp\, x$ vien chiamata funzione esponenziale[1].

Se si possiede una conoscenza anche modesta della matematica elementare si potrà dimostrare abbastanza facilmente che:

$$(exp\, x) \times (exp\, y) = exp\, (x + y) \quad \dots \quad (A)$$

o, in altri termini che:

$$(exp\, x) \times (exp\, y) = 1 + (x + y) + \frac{(x + y)^2}{2!} + \frac{(x + y)^3}{3!} + \dots + \frac{(x + y)^n}{n!} + \dots$$

Questa proprietà (A) è un esempio di ciò che vien chiamato una formula di addizione. Quando si è definita una funzione qualsiasi, poniamo la $f(x)$, la prima cosa che si fa è di cercare di esprimere $f(x + y)$ per mezzo di funzioni note della sola x e della sola y. Se si riesce a far questo il risultato vien chiamato formula di addizione. Le formule di addizione hanno un ruolo importante nell'analisi matematica. Così ad esempio la formula di addizione per il seno è data da

$$sen\, (x + y) = sen\, x\, cos\, y + cos\, x\, sen\, y$$

e quella per il coseno da

$$cos\, (x + y) = cos\, x\, cos\, y - sen\, x\, sen\, y$$

---

[1] Essa si identifica con e^x (dove e è il numero base dei logaritmi naturali), ed è in questo secondo modo che viene di solito denotata. (n. d. t.)

In realtà il miglior modo di definire *sen x* e *cos x* non si ha mediante i complicati metodi geometrici del capitolo precedente; esso consiste invece nel definirli come i limiti rispettivamente delle serie

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \text{ecc.....}$$

e

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \text{ecc.....}$$

in guisa che noi poniamo

$$sen\ x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \text{ecc.....}$$

$$cos\ x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \text{ecc.....}$$

Queste definizioni sono equivalenti alle definizioni geometriche, e si può dimostrare che entrambe le serie sono convergenti per tutti i valori di x, ed uniformemente convergenti in qualsiasi intervallo. Queste serie relative al seno e al coseno hanno una generale somiglianza con la serie esponenziale riportata sopra. In realtà esse sono intimamente connesse con questa per mezzo della teoria dei numeri immaginari esposta nei capitoli VII ed VIII.

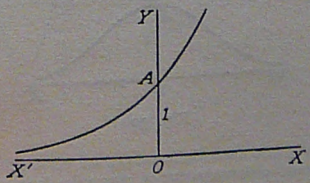

Fig. 29

Il grafico della funzione esponenziale è dato nella fig. 29. Esso taglia l'asse OY nel punto $y = 1$, come deve evidentemente essere, in quanto per $x = 0$ ogni termine

della serie eccetto il primo risulta uguale a zero. L' importanza della funzione esponenziale sta in ciò: che essa serve a rappresentare una qualsiasi quantità fisica variabile il cui saggio di incremento in un istante qualsiasi sia una percentuale uniforme del valore della quantità in quell' istante. Ad esempio il grafico precedente serve a rappresentare l'ammontare, in un momento qualsiasi del tempo, di una popolazione con quoziente di natalità uniforme, con quoziente di mortalità uniforme e nella quale non avvengono immigrazioni; in tal caso x indica il tempo calcolato a partire da una qualsiasi data opportunamente scelta, e y rappresenta in scala opportuna l'ammontare della popolazione. La scala dev'esser scelta in modo che OA rappresenti l'ammontare della popolazione alla data che vien presa come origine. Ma a questo punto noi ci siamo imbattuti nella nozione del « saggio di incremento » che costituisce l'argomento del prossimo capitolo.

Un' importante funzione molto affine alla funzione esponenziale la si trova ponendo in quest'ultima come argomento $-x^2$ in luogo di x. Si ottiene allora $exp\ (-x^2)$. Il grafico della $y = exp\ (-x^2)$ appare nella fig. 30.

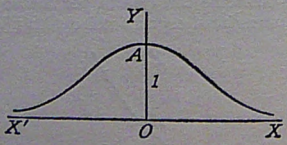

Fig. 30

La curva, che assomiglia un po' ad un cappello a tesa rialzata, vien chiamata curva normale degli errori. La corrispondente funzione è d' importanza capitale in statistica e ci indica in molti casi quale sorta di deviazioni dai risultati medi dobbiamo attenderci.

Un'altra funzione importante la si trova combinando la funzione esponenziale con la funzione seno nel

modo seguente:

$$y = exp(-cx) \times sen \frac{2\pi x}{p}$$

Il grafico relativo appare nella fig. 31. I punti A, B, O, C, D, E, F sono disposti ad intervalli uguali lunghi $\frac{1}{2}p$ e si può disegnare una serie infinita di tali punti in entrambe le direzioni. Questa funzione rappresenta lo smorzarsi di vibrazioni sotto l' influsso dell'attrito o di forze « dissipatrici ». Indipendentemente dall'attrito le vibrazioni continuerebbero periodicamente con periodo p, ma l' influenza dell'attrito rende l'ampiezza di ciascuna vibrazione minore di quella della precedente per una percentuale costante di quell'ampiezza. Questa combinazione della nozione di « periodicità » (per la

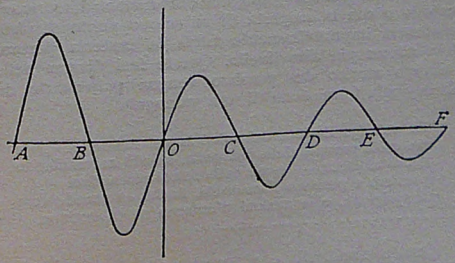

Fig. 31

cui rappresentazione simbolica occorrono il seno o il coseno) e della nozione di « percentuale costante » (per la cui rappresentazione occorre la funzione esponenziale) è il motivo per cui quella funzione si presenta nella forma di prodotto di una funzione seno per una funzione esponenziale.

Capitolo XV

IL CALCOLO DIFFERENZIALE

La creazione del calcolo differenziale segna un punto culminante nella storia della matematica. Lo sviluppo storico di questa scienza si suddivide in periodi caratterizzati da un lento accumularsi di idee e in periodi nei quali, a motivo del nuovo materiale così accumulato pazientemente, qualche genio, con l'invenzione di un nuovo metodo o con la scoperta di un nuovo punto di vista trasforma improvvisamente tutta la materia portandola ad un più alto livello. Queste fasi diverse nello sviluppo storico del pensiero vengon paragonate da Shelley alla formazione di una valanga [1].

> La valanga destata dal sole! la cui massa,
> tre volte provata dalla tempesta, s'andò accumulando
> fiocco a fiocco, — come nelle menti più audaci
> pensiero a pensiero s'accumula, finché un grande vero
> si sprigiona, e le nazioni d'intorno ne echeggiano,
> .....

Questa similitudine si presta ad esser sfruttata. L'irrompere finale del sole che desta la valanga non è un fatto che debba necessariamente superare per la sua entità tutte le altre forze naturali che han presieduto al lento formarsi della valanga stessa. E il medesimo vale per la scienza. Non è necessario che il genio il quale ha la buona ventura di formulare l'idea definitiva che

---

[1] Cfr. *Prometeo liberato*, atto II, sc. III (n. d. tr.).

trasforma un' intera regione del pensiero sia superiore a tutti i suoi predecessori che han contribuito alla preliminare formazione delle idee relative, all'argomento. Saremmo sciocchi oltre che ingrati se, nel considerare la storia della scienza, la nostra ammirazione si riducesse ad uno stupore attonito di fronte a quegli uomini i quali han compiuto l'ultimo passo che dà origine ad una nuova epoca.

Nel caso particolare che ci sta dinanzi possiamo dire che l'argomento ebbe una lunga storia prima di giungere ad assumere la sua forma definitiva per opera dei suoi due ideatori. Alcune tracce dei metodi in esso impiegati si trovan persino presso i matematici greci, e da ultimo, nel periodo immediatamente precedente la creazione di questa disciplina, l' illustre matematico francese Fermat (1601-1665), partendo dalle nozioni già esistenti, aveva compiuto tali progressi che la disciplina stessa si può considerare pressoché creata da lui. Fermat inoltre condivide col suo contemporaneo e connazionale Descartes il merito di aver ideato la geometria analitica. Di fatto fu da Descartes che il mondo ricevette le nuove idee; ma è cosa certa che Fermat era pervenuto alle stesse idee per proprio conto.

Non c' è tuttavia alcun motivo perché debba diminuire la nostra ammirazione sia di fronte a Newton che a Leibniz. Newton fu matematico e fisico, Leibniz matematico e filosofo, e ciascuno di essi fu nel proprio campo uno dei più grandi uomini che il mondo abbia conosciuto. L'esser giunti entrambi allo stesso risultato fu occasione di una infelice e deplorevole polemica. Newton si serviva del metodo delle flussioni (così egli chiamava l'argomento in questione) già nel 1666, e lo usò nella composizione dei *Principia*, benché nell'opera così come appare stampata si eviti qualsiasi notazione algebrica particolare. Ma Newton non pubblicò che nel 1693 un'esposizione diretta del suo metodo. Leibniz pubblicò la sua prima esposizione nel 1684. Dagli amici di Newton egli fu accusato di averla ricavata da un manoscritto di Newton che gli era stato mostrato in privato.

A sua volta Leibniz accusò Newton di aver plagiato da lui. Oggi non esiste quasi più alcun dubbio che ad entrambi dev'esser riconosciuto il merito di scopritore indipendente. Il soggetto era giunto ad un punto tale da esser maturo per la scoperta e non vi è nulla di sorprendente nel fatto che due uomini così eccellenti sian giunti ad essa ciascuno indipendentemente dall'altro.

Queste scoperte simultanee son del tutto comuni nella storia della scienza. In generale non si compiono delle scoperte se non si è spinti ad esse dal precedente corso del pensiero; e quando quest'ultima condizione si verifica parecchi intelletti si trovano a cercare febbrilmente l'idea importante. Volendo limitarci alle scoperte in cui figurano degli inglesi, subito ci si presentano alla mente l'enunciazione della legge della selezione naturale fatta contemporaneamente da Darwin e dal Wallace, e la scoperta di Nettuno compiuta simultaneamente da Adams e dall'astronomo francese Leverrier. Le dispute su chi debba esser riconosciuto come il vero autore di una scoperta sono spesso influenzate da un gretto spirito nazionalista. La considerazione veramente istruttiva che ci vien suggerita dalla storia della matematica riguarda invece l'unità di pensiero e di interesse che lega fra loro uomini di epoche così differenti e di così molteplici razze e nazioni. Indiani, egiziani, assiri, greci, arabi, italiani, francesi, tedeschi, inglesi e russi, tutti hanno dato contributi essenziali allo sviluppo di questa scienza. La gelosa esaltazione del contributo di una nazione particolare non indica certo una superiore larghezza di idee.

L'importanza del calcolo differenziale deriva dalla natura stessa di tale disciplina; la quale consiste nella considerazione sistematica dei saggi di incremento delle funzioni. Questa nozione ci si presenta immediatamente nello studio della natura; la velocità è il saggio di incremento della distanza percorsa, e l'accelerazione è il saggio di incremento della velocità. Così la fondamentale nozione del cangiamento, la quale sta alla base di tutta la nostra percezione dei fenomeni, suggerisce subito

la ricerca relativa al saggio di cangiamento. I termini famigliari « rapidamente » e « lentamente » acquistano significato per un tacito riferimento ai saggi di cangiamento. Così nel calcolo differenziale si ha a che fare proprio con la chiave di quella posizione dalla quale è possibile applicare con successo la matematica alla spiegazione del corso della natura. Questa nozione del saggio di cangiamento era certo presente alla mente di Newton, e si trovava incorporata nel linguaggio da lui usato per spiegare l'argomento. È dubbio invece che questo punto di vista derivato dalla considerazione dei fenomeni

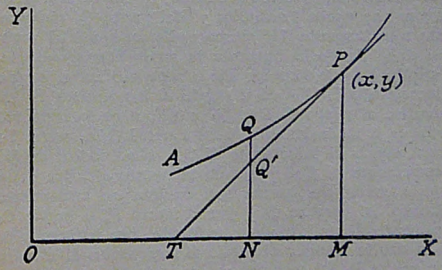

Fig. 32

naturali fosse mai stato ben presente alla mente dei precedenti matematici i quali resero possibile la nascita di quella disciplina. Essi si occupavano dei più astratti problemi riguardanti il tracciamento delle tangenti ad una curva, il calcolo delle lunghezze di curve ed il calcolo di aree racchiuse da curve. Gli ultimi due problemi (detti rispettivamente il problema della rettificazione delle curve ed il problema della quadratura delle curve) appartengono al calcolo integrale. Questo però fa parte insieme al calcolo differenziale di una stessa disciplina generale.

L' introduzione della geometria analitica porta alla fusione dei due punti di vista accennati. Infatti (cfr. la fig. 32) sia AQP una linea curva qualsiasi e PT sia la tangente ad essa nel punto P. Siano OX ed OY gli assi delle coordinate; e sia $y = f(x)$ l'equazione della curva, in guisa che $OM = x$ e $PM = y$. Ora sia Q un punto qualsiasi mobile sulla curva ed abbia per coordinate x_1, y_1; si ha allora $y_1 = f(x_1)$. Sia inoltre Q′ il punto sulla tangente avente la stessa ascissa x_1; e si supponga che le coordinate di Q′ siano x_1 e y'. Supponiamo ora che N si muova lungo l'asse OX da sinistra verso destra con velocità uniforme; in tal caso è facile scorgere che anche l'ordinata y' del punto Q′ appartenente alla tangente TP cresce uniformemente al muoversi di Q′ lungo la tangente in modo corrispondente. In effetto è facile scorgere che il rapporto fra il saggio di incremento di Q′N ed il saggio di incremento di ON è identico al rapporto fra Q′N e TN, il quale rapporto è sempre il medesimo per tutti i punti della retta. In vece il saggio di incremento di QN, che è poi il saggio di incremento di $f(x_1)$ varia da un punto all'altro della curva a meno che questa non assuma un andamento rettilineo. Al passare di Q per il punto P, il saggio di incremento di $f(x_1)$ (dove x_1 coincide, per il momento, con x) risulta identico al saggio di incremento di y' sulla tangente in P. Di conseguenza, se noi abbiamo un metodo generale per determinare il saggio di incremento di una funzione $f(x)$ della variabile x, noi siamo in grado di determinare l' inclinazione della tangente alla curva in un punto qualsiasi (x, y), e perciò possiamo tracciarla. E pertanto i problemi riguardanti il tracciamento di tangenti ad una curva e la determinazione dei saggi di incremento di una funzione sono in realtà identici.

Si noterà come, a somiglianza di quanto avvenne per le sezioni coniche e per la trigonometria, sia dal più artificioso dei due punti di vista che la disciplina prese le mosse. L'aspetto veramente fondamentale di questa scienza venne in primo piano relativamente tardi. È

una generalizzazione storica ben fondata l'affermare che in qualsiasi scienza l'ultima cosa che si giunge a scoprire è proprio questa: quale sia il vero oggetto della scienza stessa. Per secoli gli uomini procedono a tentoni, guidati soltanto da un oscuro istinto e da una perplessa curiosità finché da ultimo «un grande vero si sprigiona».

Consideriamo alcuni casi particolari allo scopo di famigliarizzarci con quel genere di concetti che è nostro intento render precisi. Un treno è in movimento — come determineremo la velocità di esso in un certo istante, poniamo a mezzogiorno? Noi possiamo considerare un intervallo di cinque minuti includente il mezzogiorno e misurare la distanza percorsa dal treno in quel tratto di tempo. Supponiamo che questa risulti di cinque miglia; possiamo allora concludere che il treno correva alla velocità di 60 miglia all'ora. Ma cinque miglia è una distanza lunga, e noi non possiamo esser certi che a mezzogiorno in punto il treno si muovesse con quell'andatura. Può darsi che a mezzogiorno corresse a 70 miglia orarie e che in seguito vi sia stato un rallentamento. Sarà quindi più sicuro operare con un intervallo più breve, poniamo di un minuto, sempre includente il mezzogiorno, e misurare lo spazio percorso in questo tratto di tempo. Può darsi però che per certi scopi occorra una precisione maggiore e che perciò l' intervallo di un minuto sia troppo lungo. In pratica la inevitabile inesattezza delle nostre misurazioni fa sì che risulti inutile prendere un intervallo troppo piccolo per compiere la misurazione; ma in teoria quanto più piccolo si prende l' intervallo e tanto meglio, è, e noi siamo tentati di dire che per ottenere una precisione ideale occorre prendere un intervallo infinitamente piccolo. In passato i matematici, e in particolare Leibniz, non solo furono tentati ma cedettero alla tentazione e lo dissero effettivamente. Persino oggi, del resto, l'affermazione in questione costituisce un utile modo di esprimersi, purché si sappia come essa vada interpretata nel linguaggio del senso comune. È curioso notare come,

nella sua esposizione dei principi del calcolo differenziale, Newton, il fisico, sia più filosofico del filosofo Leibniz e come, d'altro canto, sia stato Leibniz a fornire quella meravigliosa notazione che si rivelò così essenziale per lo sviluppo della disciplina in questione.

Consideriamo ora un altro esempio appartenente al campo della matematica pura. Supponiamo di voler determinare il saggio di incremento della funzione x^2 per un qualsiasi valore x dell' argomento. Veramente, noi non abbiamo ancora definito che cosa si intenda per saggio di incremento. Cercheremo di afferrare il significato di questo concetto riferendoci a questo caso particolare. Quando x cresce fino a divenire $x + h$, la funzione x^2 cresce fino a divenire $(x + h)^2$, di guisa che $(x + h)^2 - x^2$ è l' incremento totale dovuto all' incremento h dell'argomento. Perciò, nell' intervallo da x a $x + h$ l' incremento medio della funzione per incremento unitario dell'argomento è dato da $\frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$ [1]. Ma

$$(x + h)^2 = x^2 + 2hx + h^2$$

e quindi

$$\frac{(x + h)^2 - x^2}{h} = \frac{2hx + h^2}{h} = 2x + h$$

Perciò $2x + h$ è l' incremento medio della funzione x^2 per incremento unitario dell'argomento; dove la media si riferisce all' intervallo $(x, x + h)$. Ma $2x + h$ dipende da h che è l'ampiezza dell' intervallo. Evidentemente noi riusciremo ad ottenere ciò che stiamo cercando e cioè il *saggio* di incremento per il valore x dell'argomento, se renderemo sempre più piccolo h. Perciò *al*

---

[1] « Rapporto incrementale » è il termine comunemente usato nella letteratura matematica italiana per indicare ciò che qui l'A. chiama « incremento medio della funzione per incremento unitario dell'argomento ». (n. d. tr.).

limite, quando si è reso *h indefinitamente piccolo*, noi diciamo che $2x$ è il saggio di incremento di x^2 per il valore x dell'argomento.

Anche qui, con l'uso delle parole « al limite, quando si è reso *h* indefinitamente piccolo » sembra che ci si pari dinanzi l'idea di quantità infinitamente piccole. Leibniz riteneva che, per quanto il fatto potesse apparire misterioso, esistessero effettivamente delle quantità infinitamente piccole e naturalmente anche dei numeri infinitamente piccoli ad esse corrispondenti. Il linguaggio e le idee di Newton eran molto più vicini al punto di vista moderno; ma egli non riuscì a spiegare la cosa in modo abbastanza esplicito, cosicché si ebbe l'impressione che egli non facesse altro che esporre le idee di Leibniz con un linguaggio piuttosto indiretto. La vera spiegazione fu data per la prima volta da Weierstrass e dai matematici della scuola di Berlino verso la metà del secolo XIX. Ma nel periodo fra Leibniz e Weierstrass si ebbe tutta una copiosa letteratura sia matematica che filosofica dedicata a queste misteriose quantità infinitamente piccole che i matematici avevano scoperto e che i filosofi cercavano di spiegare. Alcuni filosofi, ad esempio il vescovo Berkeley, giustamente negarono in blocco la validità di quella concezione, benché lo facessero per ragioni diverse da quelle che vengono indicate qui. Ma rimaneva il fatto curioso che, ad onta di tutte le critiche ai fondamenti di quella disciplina, non si poteva in alcun modo dubitare che i procedimenti matematici fossero giusti. In realtà il modo di procedere, era esatto, benché le spiegazioni fossero sbagliate. È questa possibilità di esser nel giusto pur dando spiegazioni del tutto erronee circa quanto si sta compiendo che tanto spesso fa sì che la critica esterna (cioè la critica intesa ad arrestare l'uso di un metodo) risulti particolarmente sterile ed irrilevante per il progresso della scienza. L'istinto degli osservatori competenti ed il loro senso di curiosità dovuto al fatto che essi si rendono ben conto di aver dinanzi qualcosa da afferrare, sono guide di gran lunga più sicure. Comunque

il trionfo del calcolo differenziale ebbe come conseguenza generale il sorgere di una vasta produzione filosofica deteriore che si accentrava attorno all' idea dell' infinitamente piccolo. Gli ultimi residui di questa verbosità si possono ancora trovare nelle esposizioni del calcolo differenziale date in molti testi matematici elementari. Si può assumere sicuramente come regola che, quando un autore matematico o filosofo scrive con una profondità nebulosa dice cose prive di senso.

Newton avrebbe espresso il punto in questione dicendo che col tendere di h a zero, al limite $2x+h$ diviene uguale a $2x$. È nostro compito spiegare questa affermazione in guisa tale da mostrare che essa in realtà non viene a presupporre tacitamente l'esistenza delle leibniziane quantità infinitamente piccole. Quando si riesamina il metodo seguito da Newton nella sua esposizione, si è tentati di ottenere una maggiore semplicità col dire che quando h è uguale a zero $2x + h$ risulta uguale a $2x$. Ma questo non sarebbe soddisfacente; poiché così facendo si viene a sopprimere l' intervallo $(x, x + h)$ sul quale veniva calcolato l' incremento medio. Il problema è questo: come conservare un intervallo di lunghezza h sul quale calcolare l' incremento medio, e nello stesso tempo trattare h come se fosse uguale a zero. Newton ottenne ciò mediante la nozione di limite, e noi ora ci accingiamo ad esporre la spiegazione data da Weierstrass circa il vero significato di tale nozione.

Si noti anzitutto che nelle nostre discussioni su $2x + h$, noi abbiamo considerato x come fisso in valore ed h come variabile. In altre parole x è stato trattato come una di quelle variabili « costanti » o parametri di cui si è discorso nel capitolo IX, e in effetto si è considerato $2x + h$ come una funzione dell'argomento h. Possiamo quindi generalizzare il problema in discussione e chiederci che cosa intendiamo dire quando affermiamo che la funzione $f(h)$ tende al limite l quando il suo argomento h tende, poniamo, al valore zero. Ma ancora, noi vedremo come il particolare valore zero non

appartenga all'essenza della questione; e possiamo quindi generalizzare ulteriormente e chiederci che cosa intendiamo dire quando affermiamo che la funzione $f(h)$ tende al limite l quando h tende al valore a.

Ora, secondo la spiegazione di Weierstrass, la nozione del tendere di h al valore a, benché fornisca una specie di immagine metaforica di ciò che noi abbiamo di mira, è in realtà del tutto estranea al punto in questione. Ed effettivamente è ben ovvio che fino a quando conserviamo come nozione fondamentale qualcosa come « il tendere di h ad a » noi non siamo affatto usciti dalle strette dell' infinitamente piccolo; nel nostro modo di esprimerci è implicita infatti l' idea di una prossimità infinita di h ad a. Ma questo è proprio ciò di cui vogliamo sbarazzarci.

Torneremo dunque a modificare ancora una volta l'espressione da spiegare ed a chiederci che cosa intendiamo dire quando affermiamo che il limite della funzione $f(h)$ in a è l.

Il limite di $f(h)$ in a è una proprietà dell' intorno di a; inteso il termine « intorno » nel senso definito nel capitolo XI quando si discusse della continuità delle funzioni. Il valore della funzione $f(h)$ in a è $f(a)$; ma il limite è concettualmente distinto dal valore: può risultare differente da esso, e può esistere anche quando il valore non risulta determinato. Ci serviremo anche del termine « grado di approssimazione » nel senso definito nel capitolo XI. In effetto, con la definizione della continuità data verso la fine di quel capitolo, noi abbiamo in sostanza definito il limite. La definizione di limite è la seguente:

Si dice che una funzione $f(x)$ ha il limite l per un valore a del suo argomento quando nell' intorno di a i suoi valori si avvicinano ad a entro *ogni* grado di approssimazione.

Si confronti questa definizione con quella già data per la continuità, e cioè:

Una funzione $f(x)$ è continua per il valore a del suo argomento quando nell' intorno di a i suoi valori si

avvicinano al suo valore per $x = a$ entro *ogni* grado di approssimazione.

Risulta subito evidente che una funzione è continua in a quando: I) possiede un limite in a, e II) quel limite è uguale al suo valore per $x = a$. Pertanto gli esempi di continuità dati verso la fine del capitolo XI servono ad illustrare il concetto di limite, in quanto tendevano tutti a dimostrare che, per le funzioni considerate e per il valore di a considerato, $f(a)$ era il limite di $f(x)$ per $x = a$. In realtà è più istruttivo considerare il limite in un punto nel quale la funzione non è continua. Ad esempio, si consideri la funzione di cui è dato il grafico nella fig. 20 del capitolo XI. Questa funzione $f(x)$ ha, per definizione, valore 1 per tutti i valori dell'argomento eccetto gli interi 0, 1, 2, 3, ecc., e per questi valori interi ha il valore 0. Ora pensiamo al limite di tale funzione per $x = 3$. Noi notiamo che nella definizione del limite non interviene il valore della funzione per $x = a$ (in questo caso, $a = 3$). Ma se si esclude $f(3)$, i valori di $f(x)$, quando x sia interno ad un intervallo che I) contenga 3 non come estremo, e II) non si estenda fino a comprendere 2 e 4, sono tutti uguali a 1, e perciò tali valori si avvicinano ad 1 entro ogni grado di approssimazione. E quindi 1 è il limite di $f(x)$ per il valore 3 dell'argomento, mentre, per definizione, $f(3) = 0$.

È questo un esempio di funzione fornita sia di un valore che di un limite per il valore 3 dell'argomento, ma senza che il valore sia uguale al limite. Alla fine del capitolo XI si considerò la funzione x^2 per il valore 2 dell'argomento. Il suo valore per $x = 2$ è 2^2 cioè 4, e si dimostrò che il limite è pure 4. Perciò qui abbiamo una funzione con un valore ed un limite i quali coincidono.

E finalmente veniamo al caso che è d' importanza essenziale per i nostri intenti, e cioè ad una funzione che possiede un limite ma non possiede alcun valore determinato per un certo valore del suo argomento. Non occorre andar lontano per trovare una funzione siffatta: $\frac{2x}{x}$ servirà al nostro scopo. Ebbene, in qualsiasi libro di

matematica si può trovare l'eguaglianza $\frac{2x}{x} = 2$ scritta senza esitazione e senza alcuna avvertenza. Essa presenta tuttavia una difficoltà, poiché, quando x è zero si ha $\frac{2x}{x} = \frac{0}{0}$, e $\frac{0}{0}$ non ha alcun significato determinato. E pertanto il valore della funzione $\frac{2x}{x}$ per $x = 0$ non risulta avere alcun significato determinato. Ma per ogni altro valore di x il valore della funzione $\frac{2x}{x}$ è 2; e perciò il limite di $\frac{2x}{x}$ per $x = 0$ è 2, mentre la funzione non ha alcun valore per $x = 0$. Analogamente il limite di $\frac{x^2}{x}$ per $x = a$ è a, qualunque possa essere il valore a, in guisa che per $x = 0$ il limite di $\frac{x^2}{x}$ è 0. Ma il valore di $\frac{x^2}{x}$ per $x = 0$ assume la forma $\frac{0}{0}$ che non ha alcun significato determinato. E quindi per $x = 0$ la funzione $\frac{x^2}{x}$ ha un limite ma non ha un valore.

Ritorniamo ora al problema dal quale siamo partiti in questa discussione sulla natura del limite. Come dovremo definire il saggio di incremento della funzione x^2 per un qualsiasi valore x del suo argomento? La nostra risposta è che questo saggio di incremento è il limite della funzione $\frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$ per il valore zero del suo argomento h. Noi abbiamo:

$$\frac{(x+h^2) - x^2}{h} = \frac{2hx + h^2}{h} = \frac{h(2x+h)}{h}$$

Ora nella determinazione del limite di $\frac{h(2x+h)}{h}$

per il valore o dell'argomento h, il valore della funzione per $h = 0$ (ammesso che esista), resta escluso. Ma per tutti i valori di h eccetto $h = 0$ noi possiamo eseguire la divisione per h. Perciò il limite di $\frac{h(2x + h)}{h}$ per $h = 0$ risulta identico al limite di $2x + h$ per $h = 0$. Ora, qualunque grado di approssimazione k si voglia assumere, è possibile scorgere, considerando l' intervallo $(-\frac{1}{2}k, +\frac{1}{2}k)$ che, per valori di h compresi in tale intervallo, $2x + h$ differisce da $2x$ per meno di $\frac{1}{2}k$, e quindi per meno di k. E questo è vero per *qualsiasi* grado di approssimazione k. Perciò nell' intorno del valore o dell'argomento h, $2x + h$ si avvicina a $2x$ entro *ogni* grado di approssimazione e quindi $2x$ è il limite di $2x + h$ per $h = 0$. E di conseguenza, per quanto si è visto sopra, $2x$ è il limite di $\frac{(x + h)^2 - x^2}{h}$ per il valore o di h. Ne segue pertanto che $2x$ è ciò che noi abbiam chiamato il saggio di incremento di x^2 per il valore x dell'argomento. Così questo metodo ci conduce allo stesso saggio di incremento per x^2 a cui ci portava il metodo leibniziano consistente nel far divenire h « infinitamente piccolo ».

Generalmente per indicare ciò che noi abbiamo fin qui chiamato il « saggio di incremento » di una funzione si usano i termini più astratti di « coefficiente differenziale » o di « funzione derivata ». La definizione generale è la seguente: la derivata della funzione $f(x)$ è il limite (ammesso che questo esista) della funzione $\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$ dell'argomento h, per il valore o del suo argomento.

Come è stato possibile, mediante questa definizione e mediante la definizione sussidiaria del limite, giungere ad eliminare la nozione dei « numeri infinitamente piccoli » che diede tanto da fare ai matematici nostri antenati ? Per costoro la difficoltà scaturiva dal fatto che

essi da una parte dovevano servirsi di un intervallo $(x, x + h)$ sul quale calcolare l' incremento medio mentre d'altro canto essi di trovavano in fondo nella necessità di porre $h = 0$. Di conseguenza essi ritennero di esser giunti al concetto di un intervallo effettivamente esistente di ampiezza zero. Ora qual' è il modo in cui noi evitiamo questa difficoltà ? Esso è il seguente: noi ci fondiamo sul concetto che in corrispondenza di *qualsiasi* grado di approssimazione è possibile trovare *qualche* intervallo con le tali e tal'altre proprietà. La differenza consiste in ciò; che noi abbiamo afferrata l' importanza della nozione di « variabile » mentre essi non l'avevano afferrata. E così, al termine della nostra esposizione dei concetti essenziali dell'analisi matematica noi siamo ricondotti alle idee dalle quali prese le mosse, nel capitolo II, la nostra ricerca: e cioè che in matematica le nozioni d' importanza fondamentale sono le nozioni di « *qualche* cosa » e di « *qualsiasi* cosa ».

Capitolo XVI

LA GEOMETRIA

Anche la geometria come tutte le altre discipline matematiche è una scienza astratta. In essa si studiano le proprietà delle figure e le posizioni relative degli oggetti. Ma noi non abbiam bisogno di stare a considerare chi osserva gli oggetti e se egli venga a conoscerli per mezzo della vista o del tatto o dell'udito. In breve, noi trascuriamo tutte le sensazioni particolari. Trascuriamo inoltre gli oggetti particolari quali il Palazzo del Parlamento o il globo terrestre. Ogni proposizione di questa scienza si riferisce a qualsiasi oggetto che possieda le tali o tal'altre proprietà geometriche. Naturalmente il tener d'occhio esempi particolari di sfere e coni e triangoli e quadrati aiuta la nostra immaginazione. Ma le proposizioni non si applicano soltanto alle figure che di fatto si trovano stampate nel libro, ma a qualsiasi figura del tipo in questione.

E perciò la geometria è, come l'algebra, dominata dalle nozioni di «qualsiasi» oggetto e di «qualche» oggetto. Inoltre essa studia nello stesso modo le relazioni esistenti fra gruppi di oggetti. Consideriamo ad esempio due triangoli qualsiasi ABC e DEF.

Quali relazioni devono esistere fra alcuni degli elementi di questi triangoli affinché i triangoli possano risultare sotto ogni rispetto uguali? Questa è una delle prime indagini intraprese in tutte le geometrie elementari. Si tratta di studiare un certo gruppo di possibili

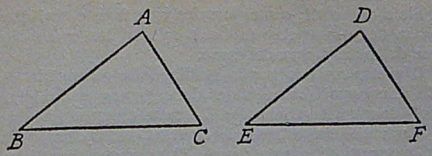

Fig. 33

correlazioni fra i due triangoli. La risposta è che i triangoli risultano sotto ogni riguardo uguali se: *a*) Due lati dell'uno e l'angolo compreso sono uguali rispettivamente a due lati e all'angolo compreso dell'altro.

Oppure: *b*) Due angoli dell'uno ed il lato ad essi adiacente sono uguali rispettivamente a due angoli e al lato ad essi adiacente dell'altro.

Oppure: *c*) I tre lati dell'uno sono rispettivamente uguali ai tre lati dell'altro.

Questa risposta suggerisce subito un'ulteriore indagine. Qual' è la natura della correlazione esistente fra i triangoli quando i tre angoli dell'uno sono rispettivamente uguali ai tre angoli dell'altro? Questa ulteriore ricerca ci conduce alla teoria della similitudine (cfr. il capitolo XIII) che è un altro tipo di correlazione.

Inoltre, per prendere un altro esempio, consideriamo la struttura interna del triangolo ABC. I lati e gli angoli di questo sono connessi tra loro da certe relazioni (l'angolo maggiore è opposto al lato maggiore e gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono uguali). Se poi passiamo alla trigonometria questa correlazione risulta determinata in modo più preciso nella nota forma:

$$\frac{sen\ A}{a} = \frac{sen\ B}{b} = \frac{sen\ C}{c}$$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ cos\ A$, con le altre due formule analoghe.

Vi è inoltre una correlazione ancor più semplice fra gli angoli di un triangolo e cioè che la loro somma è

uguale a due retti; come pure fra i tre lati, e cioè che la somma delle lunghezze di due qualsiasi fra essi è maggiore della lunghezza del terzo.

Il giusto metodo per lo studio della geometria consiste dunque nel considerare delle figure semplici notevoli quali il triangolo, il parallelogramma ed il cerchio e nell' investigare le correlazioni esistenti fra i vari elementi di queste figure. Il geometra ha dinanzi alla sua mente non una proposizione isolata, ma una figura con le sue diverse parti connesse tra loro da relazioni. Proprio come avviene in algebra egli generalizza passando dal triangolo al poligono e dal lato alla sezione conica. Oppure, seguendo la via opposta, egli classifica i triangoli a seconda che essi sono equilateri, isosceli o scaleni e i poligoni a seconda del numero dei loro lati e le sezioni coniche a seconda che esse sono iperboli, ellissi o parabole.

Gli esempi precedenti mettono in luce come le nozioni fondamentali della geometria siano esattamente le stesse di quelle dell'algebra; con la differenza che in algebra si tratta di numeri, mentre in geometria si tratta di linee, angoli, superficie ed altre entità geometriche. Questa fondamentale identità è una delle ragioni per cui è possibile dare una veste algebrica a tante verità geometriche. Così se A, B, C sono i numeri dei gradi di ciascuno rispettivamente degli angoli del triangolo ABC, la correlazione esistente fra gli angoli stessi è indicata dall'eguaglianza.

$$A + B + C = 180^{o};$$

e se a, b, c, sono i numeri indicanti la lunghezza di ciascuno rispettivamente dei tre lati, la correlazione esistente fra i lati è data da $a < b + c$, $b < c + a$, $c < a + b$. Ancora, le formule trigonometriche sopra citate sono altri esempi del medesimo fatto. E pertanto la nozione della variabile e della correlazione fra variabili è proprio altrettanto essenziale in geometria che in algebra.

Ma è possibile spingere ancora più in là il parallelismo fra la geometria e l'algebra, in quanto le lunghezze,

le aree, i volumi e gli angoli sono tutti misurabili, in guisa che ad esempio l'estensione di una qualsiasi lunghezza può venir determinata mediante il numero (non necessariamente intero) di volte che essa contiene una qualche unità arbitrariamente fissata, ed il medesimo può farsi per le aree, i volumi, e gli angoli. Le formule trigonometriche date sopra sono esempi di questo fatto. Il quale però trova la sua applicazione suprema nella geometria analitica. Talvolta si indica questa grande disciplina col nome improprio di sezioni coniche analitiche, fissando in tal modo l'attenzione su uno soltanto dei suoi rami. È come se quella grande scienza che è l'antropologia venisse denominata studio dei nasi, solo perché i nasi sono una parte bene in vista del corpo umano.

Benché i procedimenti matematici della geometria e dell'algebra siano identici quanto alla loro essenza e connessi quanto al loro sviluppo, vi è però naturalmente una fondamentale distinzione fra le proprietà dello spazio e le proprietà del numero — in effetto vi è tutta la differenza essenziale esistente fra lo spazio ed il numero. La «spazialità» dello spazio e la «numeralità» del numero sono cose essenzialmente differenti e vanno apprese direttamente. In nessuna delle applicazioni dell'algebra alla geometria o della geometria all'algebra vi è la minima tendenza ad obliterare questa fondamentale distinzione.

Una differenza molto pronunciata fra spazio e numero consiste in ciò: che il primo sembra sia di gran lunga meno astratto e meno fondamentale del secondo. Si può contare il numero degli arcangeli per il semplice fatto che essi sono delle entità. Una volta noto che i loro nomi sono Raffaele, Gabriele e Michele e che questi nomi distinti rappresentano esseri distinti, noi, senza bisogno di ulteriori indagini sappiamo che si tratta di tre arcangeli. Tutte le possibili sottigliezze circa la natura dell'esistenza angelica non possono alterare questo fatto, una volta che si siano concesse le premesse.

Ma noi siamo ancora all'oscuro circa le relazioni fra

tali esseri e lo spazio. Si può dire in generale che esistono nello spazio? Forse è altrettanto insensato dire che essi sono qui o dire che sono là, o in un luogo qualsiasi o in ogni luogo. Può darsi che la loro esistenza non abbia assolutamente alcuna relazione con i luoghi dello spazio. Perciò, mentre il numero deve applicarsi a tutte le cose, non è necessario che lo spazio si applichi a tutte.

La percezione della località delle cose sembra accompagni o sia implicita in molte o in tutte le nostre sensazioni. Essa è indipendente da qualsiasi sensazione particolare, nel senso che essa accompagna molte sensazioni. Essa è però una particolarità caratteristica delle cose che noi apprendiamo mediante le nostre sensazioni. L'apprensione diretta di ciò che noi chiamiamo posizione reciproca delle cose è un fatto *sui generis*, proprio come lo è l'apprensione dei suoni, dei colori, dei sapori e degli odori. A prima vista quindi sembrerebbe che la matematica, dal momento che include nel suo ambito la geometria, non sia astratta in quel senso in cui venne dichiarata tale nel capitolo I.

Questo tuttavia è un errore: la verità e che la «spazialità» dello spazio non entra affatto nei nostri ragionamenti geometrici. Essa entra bensì nelle intuizioni geometriche dei matematici e vi entra in maniera personale e diversa da individuo ad individuo. Ma nei ragionamenti entrano certe proprietà degli oggetti nello spazio e degli oggetti che formano lo spazio, le quali proprietà sono perfettamente astratte nel senso in cui il termine astratto venne definito nel capitolo I; queste proprietà non implicano alcuna particolare apprensione o intuizione o sensazione dello spazio. Esse si trovano esattamente sullo stesso piano delle proprietà matematiche del numero. E perciò l'intuizione dello spazio pur fornendo un aiuto tanto essenziale per lo studio della geometria, risulta logicamente irrilevante: essa non entra nelle premesse, allorché queste vengono formulate in modo opportuno, né entra in alcun passaggio dei ragionamenti. Essa ha la importante funzione pratica di fornire degli esempi che possano stimolare il

nostro pensiero. E degli esempi sono altrettanto necessari per stimolare i nostri pensieri sul numero. Quando pensiamo il « due » e il « tre » noi vediamo una fila di aste o un mucchietto di palline o qualche altro aggregato fisico di oggetti particolari. Il tratto peculiare della geometria risiede nella fissità e nell' importanza dominante che vi assume quell'esempio particolare che si trova dinanzi alla nostra mente. Quando le proposizioni vengono formulate in modo adeguato la loro forma logica astratta risulta la seguente: Se delle collezioni qualsiasi di oggetti hanno le tali proprietà astratte, allora esse hanno anche le tali altre proprietà astratte. Ma ciò che si presenta all'occhio della nostra mente è una collezione di punti, di linee, di superficie e di volumi nello spazio: e l'esempio che abbiam dinanzi appare inevitabilmente, ed è, il solo esempio che conferisca alla proposizione il suo interesse. E tuttavia, nonostante la sua importanza dominante, esso non è che un esempio.

La geometria, considerata come scienza matematica, è un ramo della più generale scienza dell'ordine. Si può chiamarla la scienza dell'ordine dimensionale; e il motivo per cui si introduce questa precisazione: « dimensionale » è che le limitazioni che fanno della geometria una parte soltanto della scienza generale dell'ordine, sono tali da fornirci le relazioni regolari fra rette e piani e fra i piani e la totalità dello spazio.

È facile rendersi conto dell' importanza pratica dello spazio nella genesi della concezione scientifica di un mondo fisico esterno. Da un lato, le nostre percezioni dello spazio si intrecciano con le nostre varie sensazioni collegandole fra loro. Noi in circostanze normali siamo persuasi di toccare l'oggetto nello stesso luogo in cui lo vediamo; e persino nei casi anormali noi di fatto lo tocchiamo nello stesso luogo in cui lo vediamo, e questo è il vero fatto fondamentale che lega tra loro le nostre varie sensazioni. E quindi le percezioni dello spazio costituiscono in certo senso la parte comune delle nostre sensazioni. Accade inoltre che una vasta

parte di tutto ciò che si trova legato alla spazialità è costituita dalle proprietà astratte dello spazio. Non è esagerato dire che ad ogni proprietà dello spazio corrisponde un enunciato matematico astratto. Per prendere l'esempio più sfavorevole: una curva potrà avere una speciale bellezza di forma, ma in corrispondenza di questa forma vi saranno delle proprietà matematiche astratte che si accompagnano a tale forma e non ad altre.

Così per riassumere diremo che: 1) Le proprietà dello spazio studiate in geometria sono come quelle del numero, proprietà appartenenti alle cose in quanto tali, e indipendentemente da ogni speciale riferimento a qualsiasi forma particolare di apprensione; 2) La percezione dello spazio accompagna forse tutte le nostre sensazioni, e certo ne accompagna molte, ma non sembra tuttavia una proprietà necessaria delle cose che esse debbano esistere tutte in un unico spazio o che debbano comunque trovarsi in uno spazio.

Capitolo XVII

LA QUANTITÀ

Nei capitoli precedenti abbiamo messo in rilievo come le lunghezze siano misurabili in base a qualche lunghezza presa come unità di misura, le aree in base a qualche area presa come unità di misura e i volumi in base a qualche volume preso come unità di misura.

Quando abbiamo un gruppo di oggetti i quali siano, al pari delle lunghezze, misurabili in base ad uno qualsiasi fra essi, noi diciamo che si tratta di quantità omogenee. Così le lunghezze sono omogenee tra loro e così pure le aree tra loro ed i volumi tra loro. Ma un'area non è una quantità omogenea con una lunghezza, e neppure essa è omogenea con un volume. Riflettiamo ancora un poco su ciò che si intende per misurabilità, prendendo come esempio le lunghezze.

Le lunghezze si misurano col metro. Trasportando il metro da un luogo all'altro noi riconosciamo l'uguaglianza di certe lunghezze. Inoltre, tre lunghezze adiacenti di un metro ciascuna formano una lunghezza complessiva di tre metri. Così, per misurare le lunghezze ci occorre determinare e l'uguaglianza di certe lunghezze e l'addizione delle lunghezze. Quando abbiamo applicato qualche criterio, come ad esempio il trasporto di un metro, noi diciamo che le lunghezze sono uguali; e quando abbiamo applicato qualche procedimento tale da assicurarci che le lunghezze siano contigue e non abbiano alcuna parte comune, noi diciamo che le lunghezze sono state addizionate in modo da formare un'unica lunghezza complessiva. Noi però non possiamo scegliere

arbitrariamente un criterio qualsiasi come criterio dell'uguaglianza, né un procedimento qualsiasi come procedimento di addizione. I risultati delle operazioni di addizione e dei giudizi di uguaglianza devono trovarsi in accordo con certe condizioni già ammesse in precedenza. Ad esempio, l'addizione di due lunghezze maggiori deve dare come risultato una lunghezza maggiore di quella che risulta dall'addizione di due lunghezze più piccole. Queste condizioni presupposte, quando vengano formulate in maniera accurata, possono denominarsi assiomi della quantità. Circa la loro verità o falsità, l'unica questione che può sorgere è questa: e cioè se una volta che sian soddisfatti tali assiomi, noi otteniamo ciò che l'uomo volgare chiama quantità. Se ciò non avviene, allora vuol dire che il nome «assiomi della quantità» è stato scelto male — e questo è tutto.

Questi assiomi della quantità sono del tutto astratti, proprio come lo sono le proprietà matematiche dello spazio. Essi sono i medesimi per tutte le quantità e non presuppongono alcuna forma particolare di percezione. Le idee associate alla nozione di quantità sono il mezzo che rende possibile la suddivisione di un continuo come ad esempio una linea o una superficie o un volume, in parti determinate. Queste parti vengono poi contate; e in tal modo diventa possibile servirsi dei numeri per determinare le esatte proprietà di un tutto continuo.

La nostra percezione dello scorrere del tempo e della successione degli eventi è un esempio capitale dell'applicazione di queste idee relative alla quantità. Come si è detto quando venne presa in esame la periodicità, noi misuriamo il tempo dalla ripetizione di eventi simili: il bruciare dei successivi centimetri di una candela di grossezza uniforme, la rotazione della terra rispetto alle stelle fisse, la rotazione delle lancette di un orologio, sono tutti esempi di siffatte ripetizioni. Gli eventi di questa assumono la stessa funzione del metro in rapporto alle lunghezze. Non è necessario supporre che gli eventi appartenenti ad uno qualsiasi dei tipi indicati

abbiano una durata esattamente uguale ogni volta che si ripetono. Ciò che occorre è che si conosca una regola la quale ci permetta di esprimere le durate relative di diversi esempi, poniamo due, appartenenti ad un certo tipo. Ad esempio noi possiamo supporre, se così ci piace, che la velocità di rotazione della terra decresca, in guisa che ogni giorno risulti più lungo del precedente di qualche piccola frazione di secondo. Una tale regola ci permette di confrontare la lunghezza di qualsiasi giorno con quella di qualsiasi altro. Ma l'essenziale è che si prenda come serie base una serie di ripetizioni come ad esempio la serie dei giorni successivi; e che, qualora i vari eventi di quella serie non si suppongano di uguale durata, venga stabilita una regola che ci permetta di indicare la durata di ciascun giorno in base alla durata di qualsiasi altro.

Quali sono dunque i requisiti che deve possedere tale regola? In primo luogo essa deve portarci ad assegnare durate pressoché uguali agli eventi che il senso comune giudica di uguale durata. Una regola che rendesse i giorni enormemente diversi in lunghezza e che rendesse diverse le velocità di operazioni apparentemente consimili, in una misura del tutto sproporzionata alla apparente esiguità delle loro differenze, non potrebbe mai andar bene. E perciò il primo requisito consiste nell'accordo generale col senso comune. Questo però non basta a determinare in modo assoluto la regola, poiché il senso comune è un osservatore grossolano e di facile contentatura. L'ulteriore requisito è che nei suoi minuti dettagli la regola sia formulata in modo da far sì che risulti possibile enunciare nel modo più semplice le leggi della natura. Ad esempio, gli astronomi ci dicono che la rotazione della terra si va facendo più lenta, di guisa che ogni giorno risulta più lungo del precedente di qualche frazione di secondo inimmaginabilmente piccola. L'unico motivo sul quale essi fondano tale loro asserzione (motivo esposto più ampiamente nella nostra discussione sulla periodicità) è che senza di essa sarebbero costretti ad abbandonare le leggi newtoniane

del moto. Allo scopo di conservare la loro forma semplice alle leggi del moto, essi alterano la misura del tempo. Questo modo di procedere è perfettamente legittimo, purché venga pienamente compreso.

Quanto si è detto circa la natura astratta delle proprietà matematiche dello spazio, si applica, con opportune modificazioni terminologiche, alle proprietà matematiche del tempo. Una coscienza del fluire del tempo accompagna tutte le nostre sensazioni, e le nostre percezioni; e in pratica tutto ciò che ci interessa nei riguardi del tempo può trovare il suo corrispettivo nelle proprietà matematiche astratte che noi attribuiamo al tempo stesso. E, reciprocamente, tutto quanto si è detto circa i due requisiti della regola con cui si determina la lunghezza del giorno, si applica pure alla regola per la determinazione della lunghezza del metro — ché il metro sembra conservi la medesima lunghezza quando viene spostato da un luogo all'altro. E perciò, qualunque sia la regola, questa deve far sì che esso, a prescindere da minute alterazioni, risulti sempre di lunghezza invariabile. Il secondo requisito, poi, è questo: che si enunci una regola determinata per le alterazioni minute, la quale renda possibile esprimere le leggi della natura nella forma più semplice. Ad esempio, in conformità al secondo requisito, si suppone che i regoli da un metro si allunghino e si accorcino al variare della temperatura, in misura diversa a seconda della sostanza di cui sono fatti.

Se non fosse per il fatto che le nostre sensazioni sono accompagnate da percezioni della situazione locale e della durata, e che le linee le superfici i volumi e le durate sono, ciascuna a suo modo, delle quantità, la teoria dei numeri sarebbe di utilità ben secondaria nell' investigazione delle leggi dell'universo. In effetto invece la fisica si fonda sulle capitali nozioni di numero, quantità, spazio e tempo. Le scienze matematiche cui si connettono tali nozioni non esauriscono l' intero campo della matematica; formano però il substrato della fisica matematica così come essa si presenta oggi.

INDICE ANALITICO

Abel, 113
Adams, 162
Addizione, formule di, 156
Ahmes, 48
Alessandro Magno, 92
Algebra, leggi fondamentali dell', 40
Ampère, 20
Analisi armonica, 140
Apollonio di Perga, 94, 97
Approssimazione, 145 e sgg.
Arabica, notazione, 38 e segg.
Archimede, 22 e segg.
Argomento di una funzione, 105
Aristotele, 18, 27, 92
Ascissa, 66
Assi, 89
Assiomi della quantità, 182 e segg.
Astrattezza (*definizione*), 3, 5
Astronomia, 99, 126, 127

Bacone, 113.
Ball, W. W. R., 38
Beaconsfield, 25
Berkeley, 167
Bhaskara, 38
Birapporto, 101
Boyle, legge di, 12

Calcolo differenziale, 160 e segg.
Calcolo integrale, 163
Cantor, Giorgio, 54
Carte geografiche, 129
Clerk Maxwell, 21
Colombo, 87
Complesse, quantità, 77
Coniche, sezioni, 92 e segg.
Continuità di una funzione, 108 e segg., *definizione*, 117
Convergenza di una serie, 149 e segg.
Convergenza assoluta, 150
Convergenza uniforme o non-uniforme, 153
Coordinate, 66
Copernico, 28, 99
Coseno, 133 e segg.
Coulomb, 20

Darwin, 100, 162
Densità di un insieme, 51
Derivata, 172
Descartes, 66, 80, 87, 161
Dinamica, 18, 26 e segg.
Dinamica, spiegazione, 5, 6, 30 e segg.
Direttrice, 98
Discontinuità di una funzione, 108 e segg.
Divergenza di una serie, 149 e segg.

Eccentricità, 98
Elettrica, corrente, 20
Elettricità, 19 e segg.

Elettromagnetismo, 19 e segg.
Ellisse, 28, 86, 93 e segg.
Errori, curva normale degli, 158
Esponenziale, serie, 155 e sgg.
Euclide, 81

Fasci di rette, 101
Faraday, 21
Fermat, 161
Flussioni, metodo delle, 161
Forma algebrica, 44 e segg., 56, 83
Forza, 17
Fourier, teorema di, 139
Franklin, 19, 87
Frazioni, 48 e segg.
Funzione, 105 e segg.
Fuoco, 86, 97

Galileo, 18, 26 e segg., 87
Galvani, 20
Generalità nella matematica, 56
Geometria, 174 e segg.
Geometria analitica, 80 e segg.
Geometria, natura astratta della, 178
Geometria proiettiva, 101
Geometrica, serie, 152 e segg.
Gerone, 23
Gilbert, 19
Grado di approssimazione, 115 e segg., 147 e segg., 169 e segg.
Grafici, 107 e segg.
Gravitazione, 16, 100, 101

Halley, 101
Harriot, Tommaso, 44
Hertz, 21

Immaginari, numeri, 60 e sgg.
Immaginarie, quantità, 77
Incognita, 9, 13
Incommensurabili, rapporti, 49 e segg.
Infinitamente piccole, quantità, 167 e segg.
Intervallo, 115 e segg.
Intorno, 115 e segg.
Iperbole, 94 e segg.
Ipparco, 126
Irrazionali, numeri, 49 e segg.

Keplero, 28, 100, 101
Keplero, leggi di, 100

Leggi del moto, 27, 121 e segg., 183, 184
Leibniz, 8, 161 e segg.
Leonardo da Vinci, 26
Leverrier, 162
Limite di una funzione, 168 e segg.
Limite di una serie, 146 e segg.
Luce, 21
Luogo geometrico, 86 e segg., 103

Macaulay, 113
Malthus, 100
Marcello, 23
Massa, 17
Meccanica, 29
Menecmo, 92

Newton, 3, 8, 20, 22, 27, 29, 100, 101, 161 e segg.

Oersted, 20
Ordinata, 66
Ordine, 142 e segg.
Ordine, tipi di, 50 e segg., 144
Origine, 66, 89, 90

Pappo, 98
Parabola, 95 e segg.
Parallelogramma, regola del, 33 e segg., 69, 90
Parametri, 46, 47, 84
Peso specifico, 25
Periodicità, 119 e segg., 137, 159
Periodo, 123, 138 e segg.
Pitagora, 5
Pitt, Guglielmo, 142
Pizarro, 87
Plutarco, 23
Positivi e negativi, numeri, 57 e segg.

Quadratura del cerchio, 136
Quantità, 181 e segg.

Rapporto, 48 e segg.
Reali, numeri, 50 e segg.
Relazioni tra variabili, 9 e segg.
Risonanza, 124
Rosebery, Lord, 142

Saggio di incremento di una funzione, 162 e segg.
Scala di una carta geografica, 130
Seidel, 155
Seno, 133 e segg.
Serie, 142 e segg.
Shelley, 160
Similitudine, 129 e segg., 175
Somma all'infinito, 148 e segg.
Stifel, 59
Stokes, Giorgio, 155
Swift, 3

Tangenti, 163, 164
Taylor, teorema di, 113
Tempo, 120 e segg., 182 e segg.
Tolomeo, 99, 126
Traslazione, vettore della, 34 e segg.
Triangolazione, 129
Triangolo, 129 e segg., 174, 175
Trigonometria, 126 e segg.

Valore di una funzione, 105
Variabile, 9, 13, 31, 56, 173, 176
Vertice, 96
Vettori, 33 e segg., 58, 66
Volta, 20

Wallace, 162
Weierstrass, 113, 167, 168

Zero, 42 e segg., 72, 73

INDICE

Cap. I – La natura astratta della matematica . . . . . *pag.* 1
» II – Le variabili 7
» III – Metodi di applicazione 14
» IV – La dinamica 26
» V – Il simbolismo matematico 38
» VI – Le successive generalizzazioni del concetto di numero 48
» VII – I numeri immaginari 60
» VIII – I numeri immaginari (*seguito*) . . . 71
» IX – La geometria analitica 80
» X – Le sezioni coniche 92
» XI – Le funzioni 105
» XII – La periodicità della natura 119
» XIII – La trigonometria 126
» XIV – Le serie 142
» XV – Il calcolo differenziale 160
» XVI – La geometria 174
» XVII – La quantità 181

Indice analitico 185

Finito di stampare
il 30 giugno 1953
nello Stab. Tip. già G. Civelli
Via Faenza n. 71
Firenze

21884

BIBLIOTECA ENCICLOPEDICA SANSONIANA

1. E. Schrödinger, *Che cos'è la vita?*
2. M. P. Nilsson, *Religiosità greca.*
3. H. Sigerist, *Introduzione alla medicina.*
4. O. Spann, *Breve storia delle teorie economiche.*
5. A. Levi, *Storia della filosofia romana.*
6. G. Tallarico, *Elogio dei microbi.*
7. W. McDougall, *Il carattere e la condotta della vita.*
8. O. Jespersen, *Come si insegna una lingua straniera.*
9. G. Devoto, *I fondamenti della storia linguistica.*
10. J. Jeans, *I nuovi orizzonti della scienza.*
11. G. Tallarico, *La vita degli alimenti.*
12. G. Tallarico, *La vita delle piante.*
13. E. Paci, *Il pensiero scientifico contemporaneo.*
14. A. Carlini, *Avviamento alla filosofia.*
15. P. Guillaume, *Psicologia animale.*
16. M. Guidi, *Storia e cultura degli arabi.*
17. P. Auger, *I raggi cosmici.*
18. W. Heisenberg, *La fisica dei nuclei atomici.*
19. L. Pietrobono, *Dante e la Divina Commedia.*
20. A. N. Whitehead, *Introduzione alla matematica.*
21. E. Schrödinger, *Scienza e Umanesimo.*

Prezzo del presente volume L. 1000

G. C. SANSONI EDITORE FIRENZE